
ANTENSKI NIZOVI U TELEKOMUNIKACIONIM SYSTEMIMA

(13M031ANT)

**Matematički modeli radio signala na antenskom nizu –
Uskopojasni i širokopojasni signali, superpozicija K signala**

**Elektrotehnički fakultet – Univerzitet u Beogradu
Odsek za telekomunikacije i informacione tehnologije
Katedra za telekomunikacije**

prof. Goran Marković (korišćeni su materijali prof. Miljka Erića)

2024/2025



Podsetnik – Pređeno i planirano

- ❖ Teorijski koncepti i principi AN, upoznavanje sa terminologom i praktičnim primenama *array procesing*-a i antenskih nizova sa težištem na sticanju praktičnih znanja, i to:
 - formiranje vektora odziva antenskog niza (*steering vector*) zadate geometrije
 - proračun faktora antenskog niza i *array patern*-a
 - usmeravanje maksimuma dijagrama usmerenosti AN (*beam*) u datom smeru
 - formiranje nula dijagrama usmerenosti AN u zadanom smeru (*null-steering*)
 - sinteza dijagrama usmerenosti AN po zadanom kriterijumu
 - formiranje *multi-beam* dijagrama usmerenosti
 - generisanje uskopojasnih i širokopojasnih komunikacionih signala na AN zadate geometrije, uključujući i uslove višestrukog prostiranja
 - realizovanje prostornog filtriranja signala od interesa
 - procena smera dolaska signala (*Direction Of Arrival*)
 - formiranje adaptivnog antenskog niza
- ❖ Osnovni teorijski koncepti i principi *space-time* komunikacija
- ❖ Osnovni principi primene AN u ćelijskim bežičnim sistemima

Radio signali – Matematički model

- ❖ **Koristimo model komunikacionih radio signala u formi kvadraturene modulacije/demodulacije:**
 - **Imamo komponentu u fazi $I(t)$ i komponentu u kvadraturi $Q(t)$.**
 - **Modulisani signal sa istovremenom modulacijom trenutne amplitude (anvelope) i trenutne devijacije faze**
 - **Na ovaj način možemo modelovati analogno modulisane signale, digitalno modulisane signale (uključujući signale sistema u proširenom spektru) kao i OFDM (Orthogonal Frequency Division Modulation/Multiplex) signale**

Radio signali - Kvadraturni model

- ❖ Analogni modulatorni postupci – modulišući signal je analogan (modulisani je uvek kontinualan u vremenu).
- ❖ U ovom slučaju kao signal nosilac uvek se koristi signal čiji je talasni oblik sinusoidalni (prostoperiodičan).
- ❖ Osnovni parametri signala su **amplituda, učestanost i faza**.
 - Amplituda nosioca menja se saglasno promenama modulišućeg signala - **amplitudska modulacija (Amplitude Modulation, AM)**
 - Učestanost nosioca menja se saglasno promenama modulišućeg signala - **frekvencijska modulacija (Frequency Modulation, FM)**
 - Faza nosioca menja se saglasno promenama modulišućeg signala - **fazna modulacija (Phase Modulation, PM)**

$$u_0(t) = \underbrace{U_0(t)}_{\text{Amplituda}} \cos\left[\omega_0 t + \underbrace{\varphi(t)}_{\text{Faza}}\right] = U_0(t) \cos\left[\omega_0 t + \int \underbrace{\frac{d\varphi(t)}{dt}}_{\text{Učestanost}} dt\right]$$

Radio signali - Kvadrturni model

❖ Opšti oblik analogno modulisanog signala je definisan izrazom:

$$\begin{aligned}u_0(t) &= U_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= U_0(t) \cos[\varphi(t)] \cos \omega_0 t - U_0(t) \sin[\varphi(t)] \sin \omega_0 t \\ &= u_{In-Phase}(t) \cos \omega_0 t + u_{Quadrature -Phase}(t) \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

$$u_{In-Phase}(t) = u_I(t) = U_0(t) \cos[\varphi(t)]$$

$$u_{Quadrature -Phase}(t) = u_Q(t) = -U_0(t) \sin[\varphi(t)]$$

Komponenta u fazi

Komponenta u kvadraturi

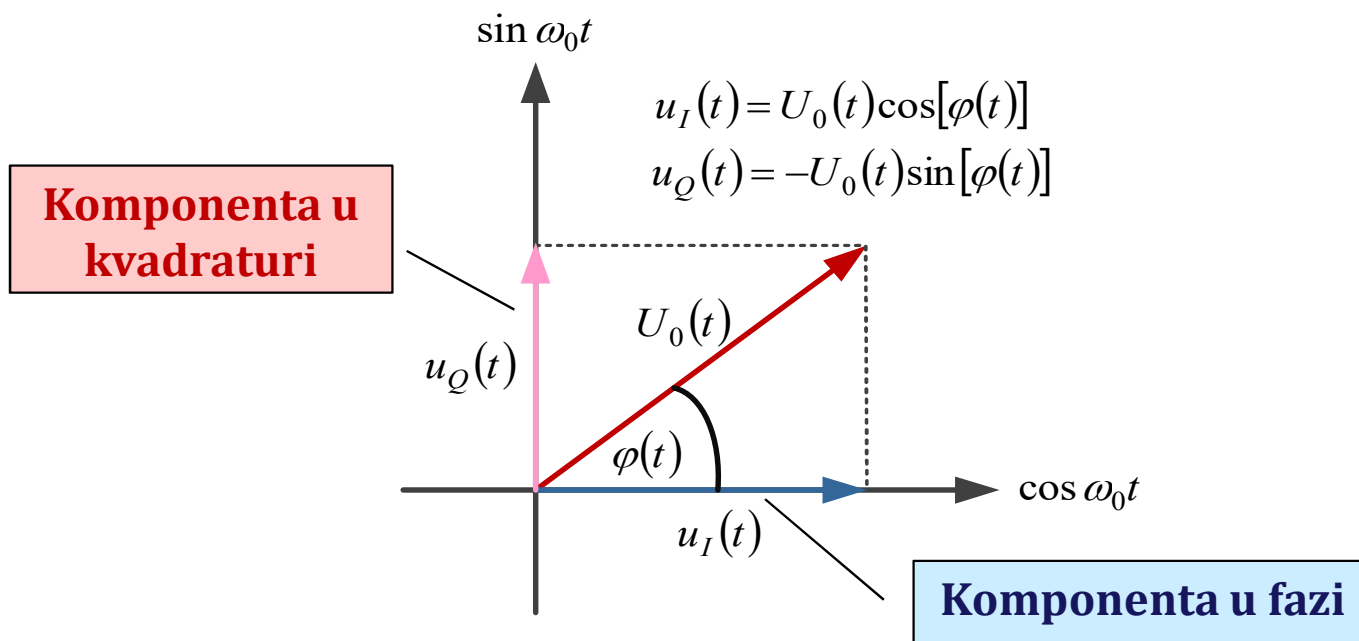
❖ Komponente signala u fazi i kvadraturi sadrže u sebi kompletnu informaciju o amplitudi i fazi modulisanog signala – tj. **kompletnu infromaciju o prenošenom modulišućem signalu utisnutom putem modulacije u trenutnu amplitudu i fazu.**

Radio signali - Kvadrturni model

- ❖ Opšti oblik modulisanog signala možemo izraziti i grafički prikazati u funkciji kvadrturnih komponenti – komponente u fazi i kvadraturi:

$$u_0(t) = U_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = u_I(t) \cos \omega_0 t + u_Q(t) \sin \omega_0 t$$

$$U_0(t) = \sqrt{u_I^2(t) + u_Q^2(t)} \quad \varphi(t) = -\arctg [u_Q(t)/u_I(t)]$$



Radio signali - Kvadrturni model

- ❖ Izvođenje veza između trenutne amplitude (anvelope) modulisanog signala, ovde označeno sa $R(t)$, trenutne devijacije faze, ovde označeno sa $\varphi(t)$, i kvadrturnih komponenti, ovde označene sa $A(t)$ i $B(t)$, je :

$$u_0(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \alpha(t)] + B(t)\cos[\omega_0 t + \beta(t)] = R(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$A(t), B(t), \alpha(t)$ i $\beta(t)$ - nisu funkcije od ω_0

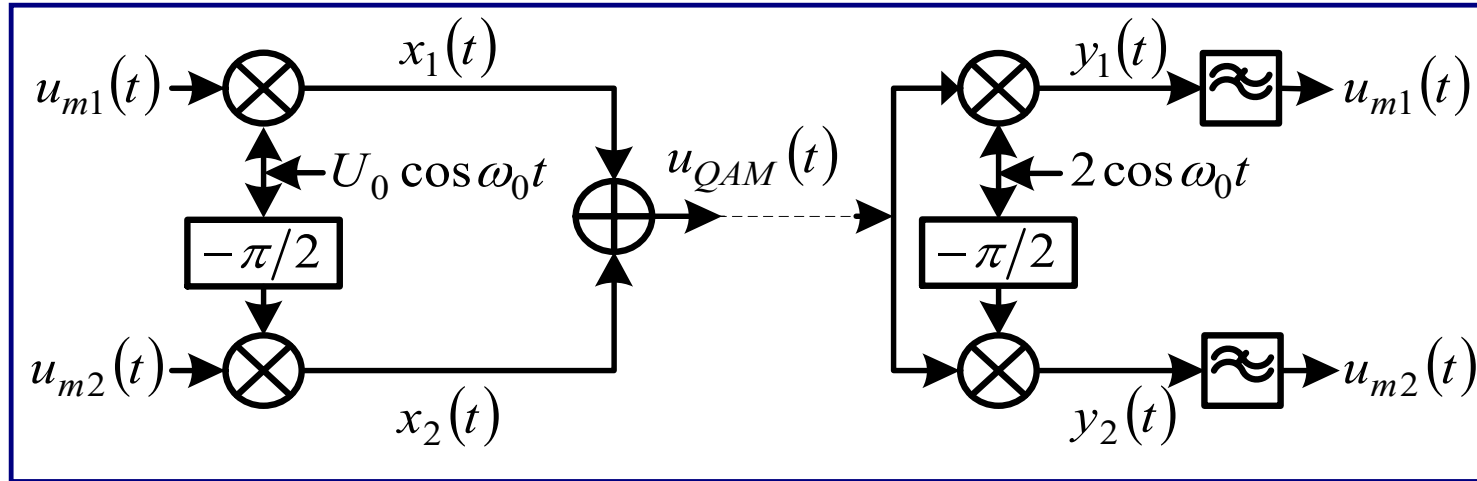
$$R(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t) + 2A(t)B(t)\cos(\alpha(t) - \beta(t))}$$

$$\varphi(t) = \arctg \left[\frac{A(t)\sin[\alpha(t)] + B(t)\cos[\beta(t)]}{A(t)\cos[\alpha(t)] + B(t)\sin[\beta(t)]} \right]$$

$$\alpha(t) = 0 = \beta(t) \Rightarrow R(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t)\cos \omega_0 t + B(t)\sin \omega_0 t$$

$$R(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} \quad \varphi(t) = \arctg \left[\frac{-B(t)}{A(t)} \right] = -\arctg \left[\frac{B(t)}{A(t)} \right]$$

Radio signali - Kvadraturni model



$$u_{QAM}(t) = x_1(t) + x_2(t) = u_{m1}(t)\cos\omega_0 t + u_{m2}(t)\sin\omega_0 t$$

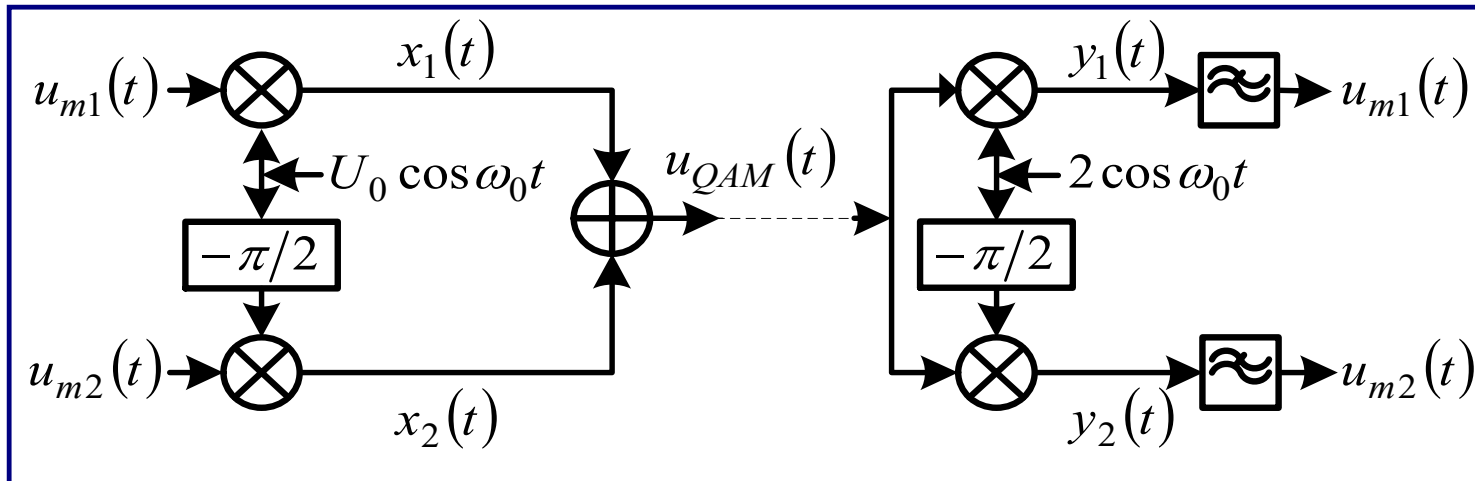
- ❖ **Kvadraturne komponente su niskofrekvencijski ekvivalentni modulisanog signala. Pri demodulaciji na prijemu u grani u fazi na izlazu dobijamo:**

$$y_1(t) = [u_{m1}(t)\cos\omega_0 t + u_{m2}(t)\sin\omega_0 t] \times 2\cos\omega_0 t = u_{m1}(t) \times 2\cos^2(\omega_0 t) + u_{m2}(t) \times 2\cos\omega_0 t \times \sin\omega_0 t$$

$$y_1(t) = u_{m1}(t) \times [\cos 0 + \cos(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times [\sin 0 + \sin(2\omega_0 t)]$$

$$\langle y_1(t) \rangle_{LPF} = \langle u_{m1}(t) \times [1 + \cos(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times \sin(2\omega_0 t) \rangle_{LPF} = u_{m1}(t)$$

Radio signali - Kvadraturni model



❖ Pri demodulaciji na prijemu u grani u kvadraturi na izlazu dobijamo:

$$y_2(t) = [u_{m1}(t)\cos \omega_0 t + u_{m2}(t)\sin \omega_0 t] \times 2 \sin \omega_0 t = u_{m1}(t) \times 2 \cos \omega_0 t \times \sin \omega_0 t + u_{m2}(t) \times 2 \sin^2(\omega_0 t)$$

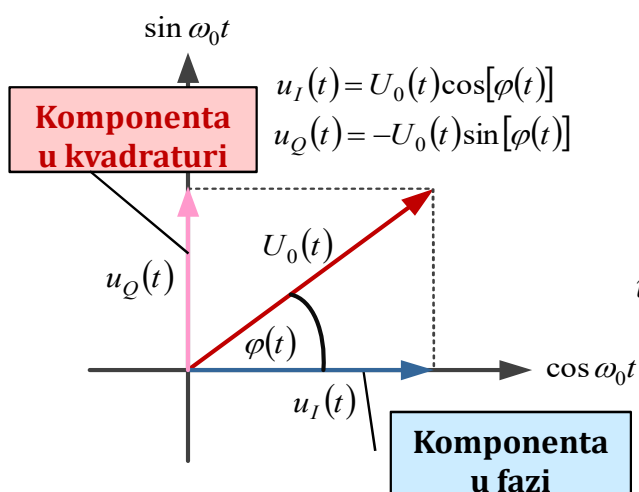
$$y_2(t) = u_{m1}(t) \times [\sin 0 + \sin(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times [\cos 0 - \cos(2\omega_0 t)]$$

$$\langle y_2(t) \rangle_{LPF} = \langle u_{m2}(t) \times [1 - \cos(2\omega_0 t)] + u_{m1}(t) \times \sin(2\omega_0 t) \rangle_{LPF} = u_{m2}(t)$$

Imamo nezavisan prenos dva signala kroz isti opseg učestanosti - razdvajanje usled ortogonalnosti nosioca. Osnovni princip rada modernih digitalnih uređaja !!

Radio signali - Kvadrturni model

- ❖ Opšti oblik modulisanog signala možemo izraziti u funkciji kvadrturnih komponenti - i na predaji i na prijemu:



$$u_I(t) = U_0(t) \cos[\varphi(t)]$$

$$u_Q(t) = -U_0(t) \sin[\varphi(t)]$$

Kvadrturna modulacija

$$u_I(t) = U_0(t) \cos[\varphi(t)]$$

$$u_Q(t) = -U_0(t) \sin[\varphi(t)]$$

$$u_{Tx}(t) = U_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = u_I(t) \cos \omega_0 t + u_Q(t) \sin \omega_0 t$$

$$u_{Rx}(t) = U_{0,Rx}(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_{Rx}(t)] = u_{I,Rx}(t) \cos \omega_0 t + u_{Q,Rx}(t) \sin \omega_0 t$$

$$U_{0,Rx}(t) = \sqrt{u_{I,Rx}^2(t) + u_{Q,Rx}^2(t)} \cong U_0(t)$$

$$\varphi_{Rx}(t) = -\arctg[u_{Q,Rx}(t)/u_{I,Rx}(t)] \cong \varphi(t)$$

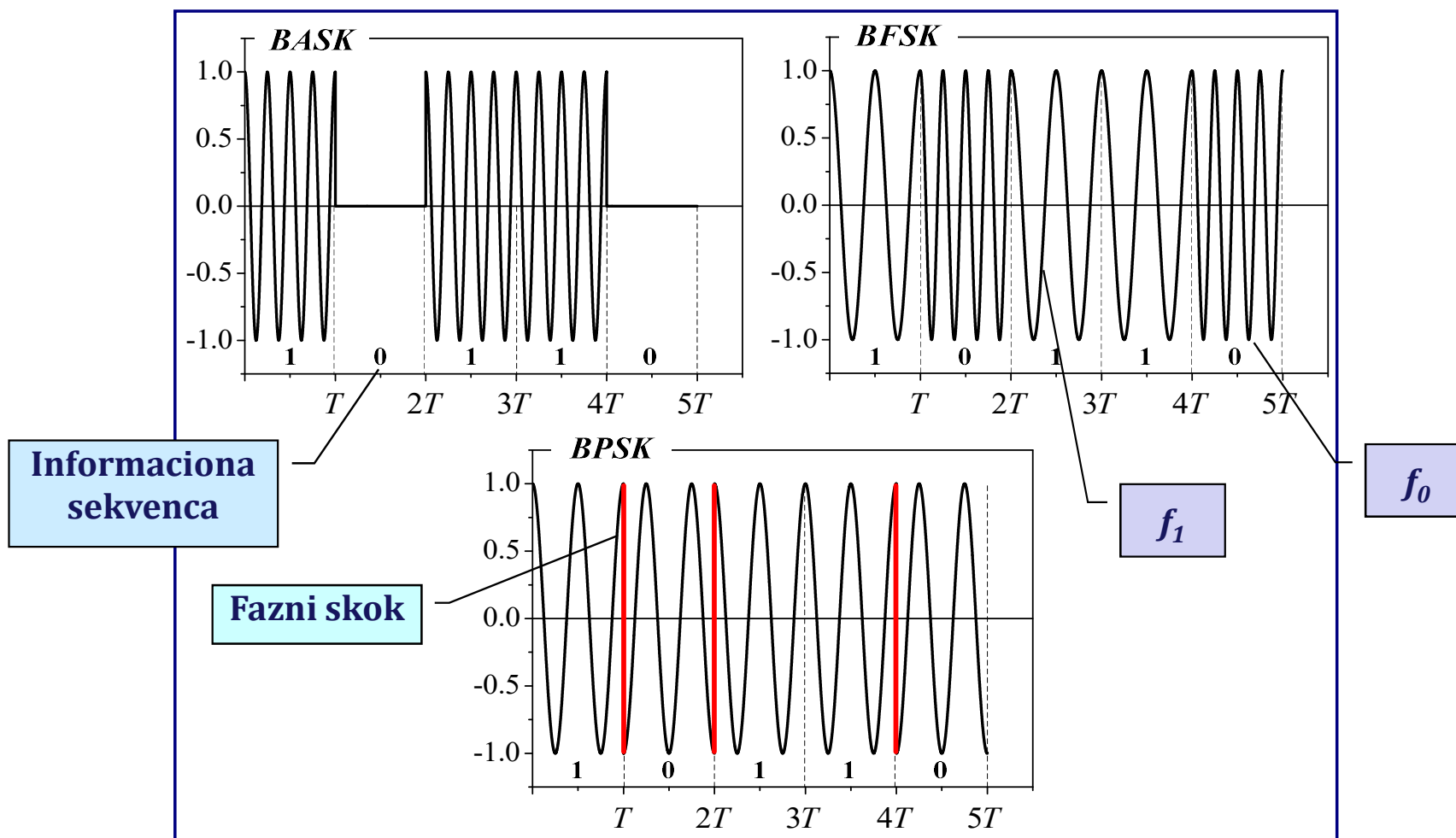
Kvadrturna demodulacija

- ❖ **SVAKI MODULISANI SIGNAL** (analogno, digitalno ili složeno modulisane signale, npr. 3G/4G/5G ...) - možemo generisati tako što generišemo odgovarajuću komponentu u fazi i kvadraturi i prenesemo kvadrturnim modulatorom i demodulatorom. Prijem - iz demodulisane komponente u fazi i kvadraturi dobijamo amplitudu $U_0(t)$ i fazu $\varphi(t)$, tj. **informaciju o signalu (informaciji) utisnutom u njih korišćenjem željenog tipa modulacije !!**

Radio signali - Kvadraturni model

- ❖ Digitalni postupak modulacije - proces u kome modulišući signal (tj. digitalni simboli koji nose informaciju) moduliše prostoperiodičan signal (tj. signal nosilac).
- ❖ Tri osnovne vrste digitalne modulacije:
 - Amplitudska modulacija (*Amplitude Shift Keying, ASK*)
 - Frekvencijska modulacija (*Frequency Shift Keying, FSK*)
 - Fazna modulacija (*Phase Shift Keying, PSK*).
- ❖ Kombinacijom tri osnovna postupka - **dodatni postupci**
 - Kombinovanjem dva BPSK signala sa ortogonalnim nosiocima - kvadraturna fazna modulacija (*Quadrature Phase Shift Keying, QPSK*).
 - Modulacijom amplitude i faze ortogonalnih nosioca - kvadraturna amplitudska modulacija (*Quadrature Amplitude Modulation, QAM*)
 - ...

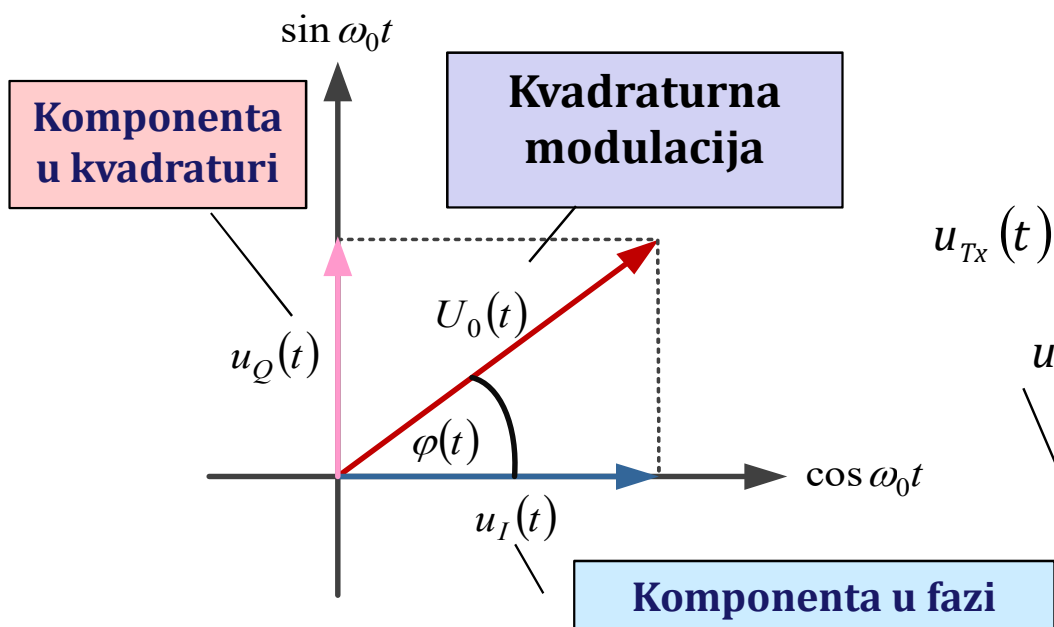
Radio signali - Kvadraturni model



Radio signali - Kvadraturni model

- ❖ Digitalni modulatorni postupci - tokom trajanja signalizacionog perioda se ne menjaju parametri signala nosioca (amplituda i/ili faza, ili frekvencija.)
 - Promena parametara signala je impulsne prirode - sa periodom signaliziranja, tj. trajanja simbola na liniji veze T_s .
 - Širina spektra signala generalno zavisi od trajanja simbola, tj. brzine signaliziranja na liniji veze $V_s = 1/T_s$.
- ❖ U slučaju linearnih digitalnih modulacija, u opštem slučaju M-arne modulacije koristimo kvadraturnu modulaciju i demodulaciju da informaciju o $m = \text{ld}(M)$ bita prenesemo tokom jednog trajanja perioda signaliziranja:
 - Informacija se utiskuje u vrednost amplitude (promena amplitude) - ASK, vrednost devijacije faze (promena faze) - PSK, ili promene vrednosti i amplitude i faze - AMPM (QAM je specijalan slučaj)
 - Ovaj postupak se naziva mapiranje bita u simbole, pri čemu promena amplitude i faze u 2D fazorskoj ravni (IQ ravan) nije kontinualna - već impulsna i diskretna. Za M-arnu modulaciju imamo M tačaka u fazorskom dijagramu, za binarnu samo dve tačke.

Radio signali - Kvadraturni model



$$u_I(t) = U_0(t) \cos[\varphi(t)] = a_k$$

$$u_Q(t) = -U_0(t) \sin[\varphi(t)] = b_k$$

$$u_{TX}(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos \left[\omega_0 t - \arctg \left(\frac{b_k}{a_k} \right) \right]$$

$$u_{TX}(t) = a_k \cos \omega_0 t + b_k \sin \omega_0 t$$

$U_0(t)$ i $\varphi(t)$ su diskretne vrednosti - $U_0(kT_s)$ i $\varphi(kT_s)$ iz nekog konačnog skupa

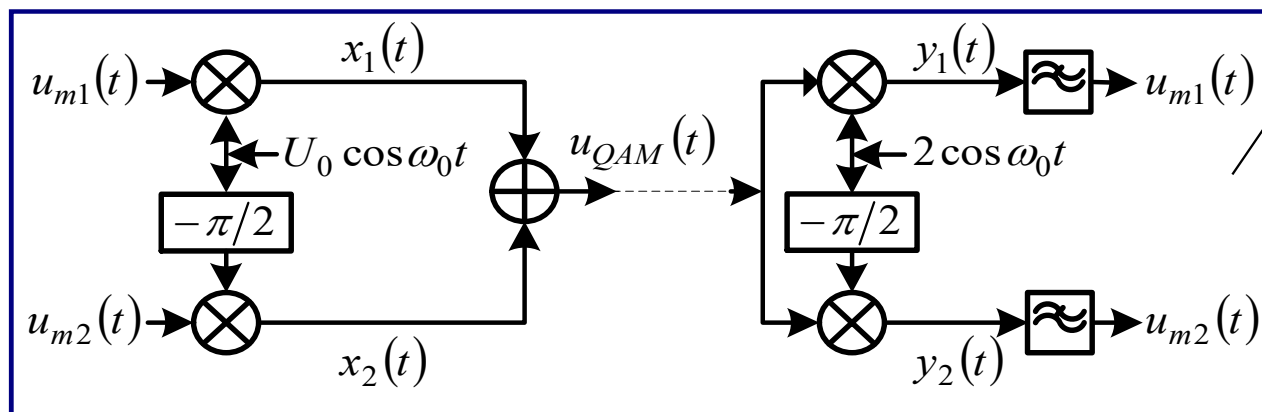
❖ U slučaju binarnih modulacija (BASK, BPSK i DBPSK) koristi se:

- samo jedna grana modulatora (npr. grana u fazi)
- na prijemu se u slučaju koherentne demodulacije koristi takođe samo jedna grana demodulatora, dok se u slučaju nekoherentne demodulacije i detekcije koriste obe grane za detekciju amplitude (ASK), ali se gubi informacija o fazi.

Radio signali - Kvadraturni model

- ❖ Prenos u OOU - primenom M -arnog prenosa može se smanjiti zahtevana vrednost propusnog opsega sistema B . **Isto važi za linearne digitalne modulacije.**
- ❖ Primenom M -arnih postupaka linearne digitalne modulacije - za zadati propusni opseg B može se preneti znatno veća količinu informacije u odnosu na binarni prenos **(prenosi se digitalni signal veće vrednosti ekvivalentnog binarnog protoka kroz isti propusni opseg)**
- ❖ Spektralna efikasnost - količnik ekvivalentne brzine signaliziranja i širine korišćenog propusnog opsega. M -arni postupci linearne modulacije povećavaju spektralna efikasnost sistema.
- ❖ M -arni PSK (MPSK) i M -arni QAM (M-QAM) postupci modulacije - zasnivaju se na kvadraturnoj (ortogonalnoj) modulaciji i demodulaciji korišćenjem *nosioca u kvadraturi* (IQ modulator + IQ demodulator, IQ - *In-Phase/Quadrature-Phase*).

Radio signali - Kvadraturni model



Blok šema sistema za prenos dva signala sa nosiocima u kvadraturi.

- ❖ Imamo istovremen prenos dva signala, $u_{m1}(t)$ i $u_{m2}(t)$ sa istom maksimalnom učestanošću u spektru vrednosti f_m - **to mogu biti dva digitalna signala istog protoka**
- ❖ Predajnik - $u_{m1}(t)$ i $u_{m2}(t)$ modulišu dva nosioca iste učestanosti fazno pomerenih za $\pi/2$, tj. na fazorskom dijagramu oni zaklapaju prav ugao. - **koristimo dva ortogonalna signala nosioca ili nosioce u kvadraturi**

$$u_{m1}(t) = \sum_k a_k x(t - kT_s), \quad u_{m2}(t) = \sum_k b_k x(t - kT_s)$$

Radio signali - Kvadraturni model

❖ U slučaju postojanja greške sinhronizacije faze, tj. za $\varphi_0 \neq 0$, dobijamo:

$$y_1(t) = u_{m1}(t) \times [\cos \varphi_0 + \cos(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times [-\sin \varphi_0 + \sin(2\omega_0 t)]$$

$$\langle y_1(t) \rangle_{LPF} = u_{m1}(t) \cos \varphi_0 - u_{m2}(t) \sin \varphi_0 \quad \langle y_1(kT_S) \rangle_{LPF} = a_k \cos \varphi_0 - b_k \sin \varphi_0$$

$$y_2(t) = u_{m1}(t) \times [+ \sin \varphi_0 - \sin(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times [\cos \varphi_0 - \cos(2\omega_0 t)]$$

$$\langle y_2(t) \rangle_{LPF} = u_{m2}(t) \cos \varphi_0 + u_{m1}(t) \sin \varphi_0 \quad \langle y_2(kT_S) \rangle_{LPF} = b_k \cos \varphi_0 + a_k \sin \varphi_0$$

U ovom slučaju dolazi do mešanja signala iz kvadrturnih grana - signal iz posmatrane kvadrature grane prijemnika se slabi po amplitudi usled množenja sa kosinusom greške sinhronizacije faze, a signal iz suprotne grane generiše interferenciju pri čemu je pomnožen sa sinusom fazne greške !!

Ovo je posledica toga što se fazorski dijagram signala rotira za vrednost greške sinhronizacije faze - vrednost u grani u fazi i kvadraturi je projekcija na x-osu i y-osu, respektivno. Zapravo, usled greške sinhronizacije faze se rotira koordinatni sistem - **unos se korelaciju između signala u kvadrturnim granama.**

Radio signali - Kvadraturni model

❖ U slučaju idealne sinhronizacije faze, tj. za $\varphi_0 = 0$, dobijamo:

$$y_1(t) = u_{m1}(t) \times [\cos \varphi_0 + \cos(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times [-\sin \varphi_0 + \sin(2\omega_0 t)]$$

$$\langle y_1(t) \rangle_{LPF} = u_{m1}(t) \cos \varphi_0 - u_{m2}(t) \sin \varphi_0$$

$$\langle y_1(kT_S) \rangle_{LPF} = a_k$$

$$y_2(t) = u_{m1}(t) \times [+ \sin \varphi_0 - \sin(2\omega_0 t)] + u_{m2}(t) \times [\cos \varphi_0 - \cos(2\omega_0 t)]$$

$$\langle y_2(t) \rangle_{LPF} = u_{m2}(t) \cos \varphi_0 + u_{m1}(t) \sin \varphi_0$$

$$\langle y_2(kT_S) \rangle_{LPF} = b_k$$

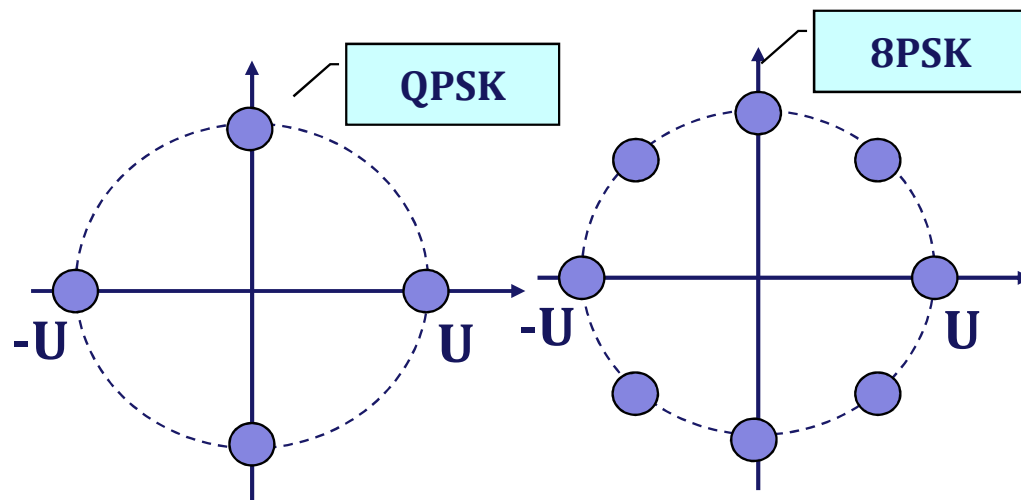
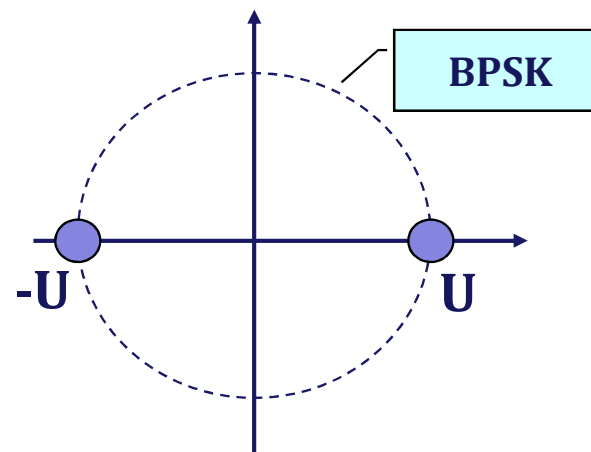
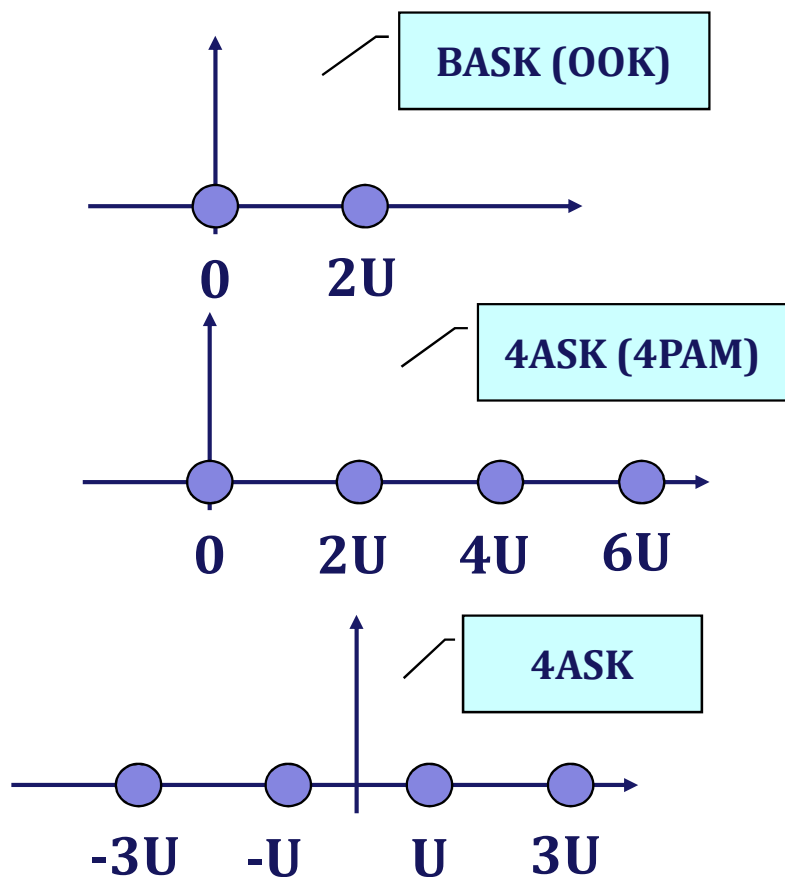
U ovom slučaju možemo idealno demodulisati signal - kako god da je modulisan (tj. zavisno kako su biti mapirani u M-arne simbole)

Proces se naziva demapiranje ili dekodiranje - simbol u fazorskoj ravni možemo posmatrati kao kompleksan broj $I + i \times Q$ (I - grana u fazi, Q - grana u kvadraturi) pri čemu je demodulacija proces u kome detektujemo u kom delu fazorske ravni se nalazi simbol + šum - odlučujemo se za najbliži od mogućih diskretnih vrednosti M-arnih simbola.

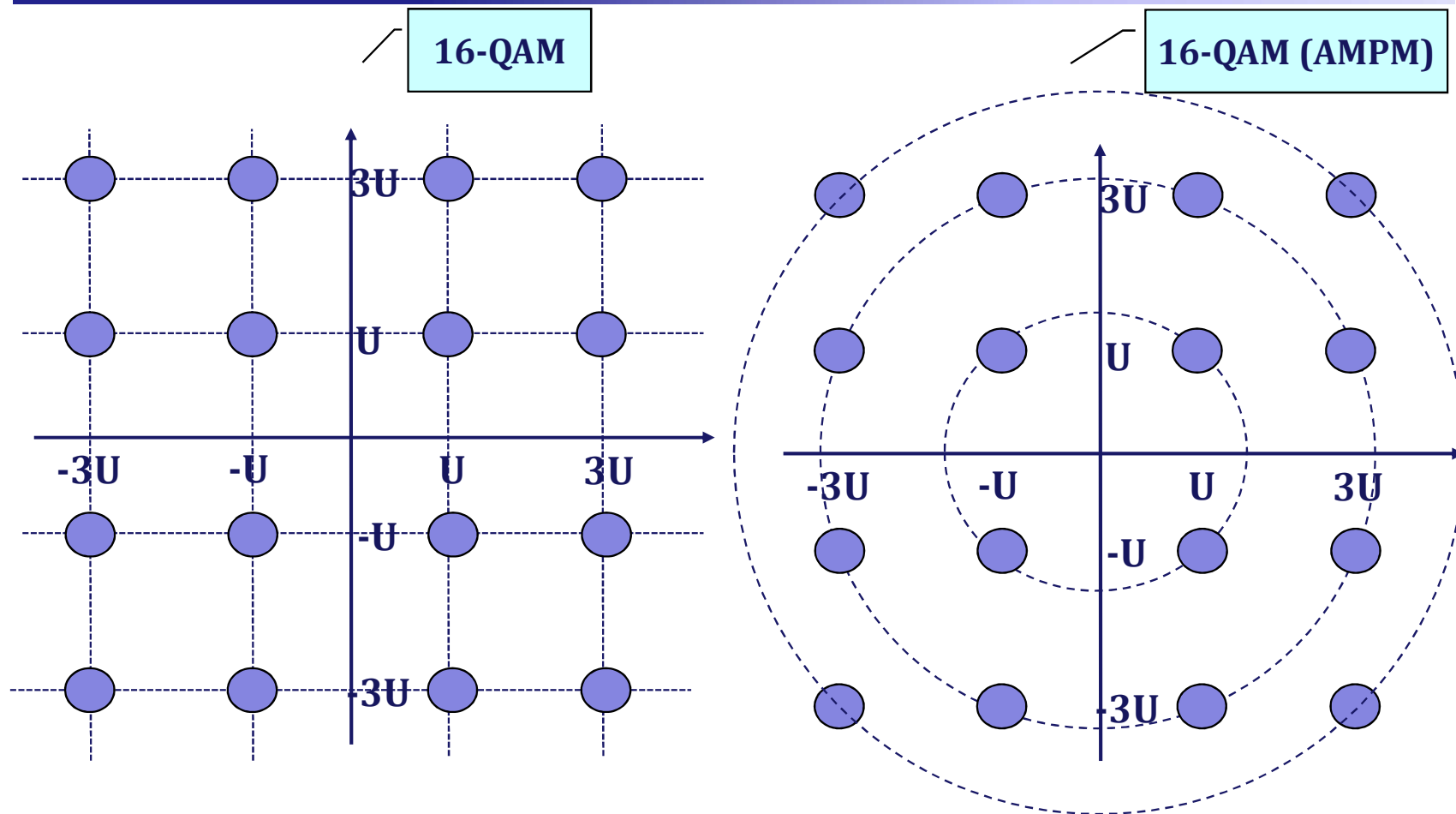
Radio signali - Kvadraturni model

- ❖ U procesu mapiranja $m = \text{ld}(M)$ bita se mapira u jedan simbol
 - U slučaju MASK modulacija reči sa m bita se mapiraju u simbole na duž prave (x -osa ili y -osa, tj. grane u fazi ili kvadraturi) na jednakom rastojanju $2U$
 - U slučaju MPSK modulacija reči sa m bita se mapiraju u simbole sa jednakim ugaonim rastojanjem na kružnici amplitude U .
 - U slučaju M-QAM modulacija reči sa m bita se mapiraju u simbole sa jednakim rastojanjem $2U$ duž x -ose i y -ose
 - U slučaju AMPM modulacija M simbola (svaki nosi $m = \text{ld}M$ bita) se raspoređuju u ravni na koncentričnim kružnicama tako da se ostvari maksimalno rastojanje između simbola za definisanu srednju snagu simbola.
- ❖ Verovatnoća greške pod uticajem šuma zavisi od rastojanja između simbola
 - Cilj je napraviti skup sa M simbola (tzv. konstelacija) sa što većim međusobnim rastojanjem za definisanu srednju snagu - neke modulacije su bolje a neke lošije u tome - **energetska efikasnost !!**
 - Spektralna efikasnost svih M -arnih linearnih modulacija za istu vrednost M je ista - razlikuju se po složenosti, energetskej efikasnosti i otpornosti na pojavu greške sinhronizacije faze.
 - Susedni simboli treba da se razlikuju za najviše jedan bit - **Gray-ovo kodiranje** - imamo minimalnu verovatnoću grešku po bitu (BER) u funkciji verovatnoće greške po simbolu (SER) - odluke se donose po simbolu, cilj je da što manje bita bude pogrešno.

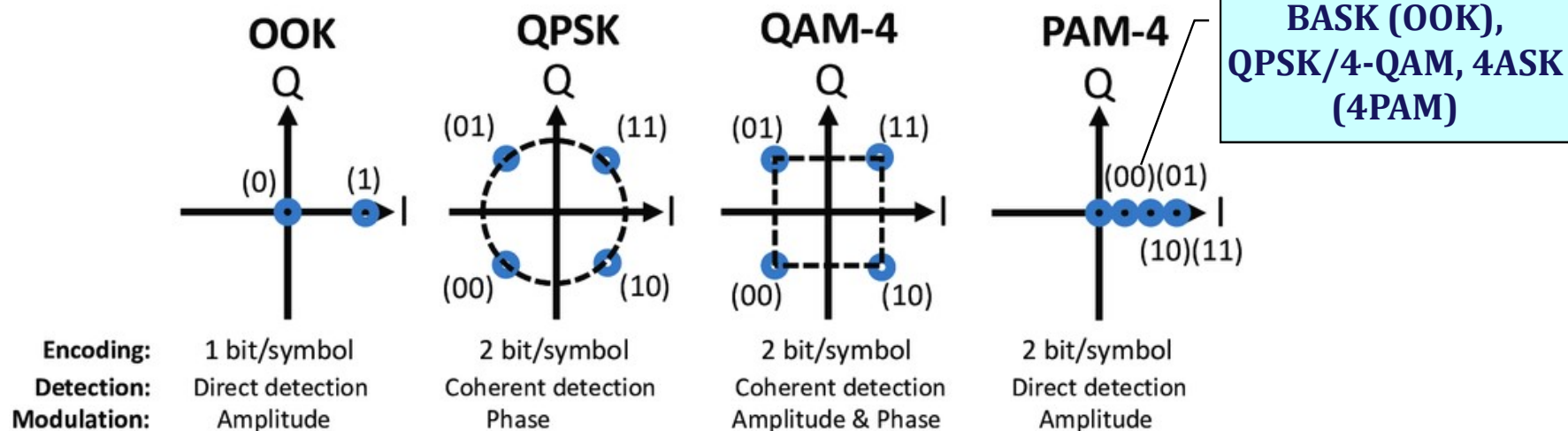
Radio signali - Kvadraturni model



Radio signali - Kvadraturni model



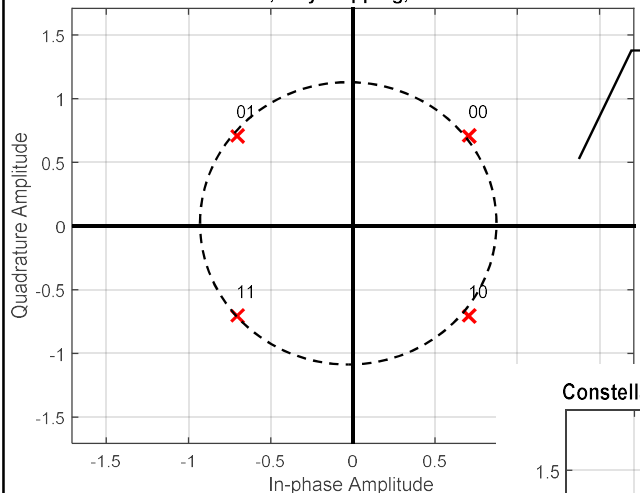
Radio signali - Kvadraturni model



- ❖ Mapiranje – svakom od M simbola dodeljujemo kodnu reč od $m = \log_2 M$ bita.
- ❖ Koristimo *Gray*-evo kodiranje – ako se napravi greška pod uticajem šuma najverovatnije ćemo dobiti susedni simbol. Susedni simboli se razlikuju za maksimalno 1 bit – ako imamo grešku po simbolu od m bita po simbolu će samo jedan biti pogrešan. **Imamo da je $BER = SER/m$ (približno)**

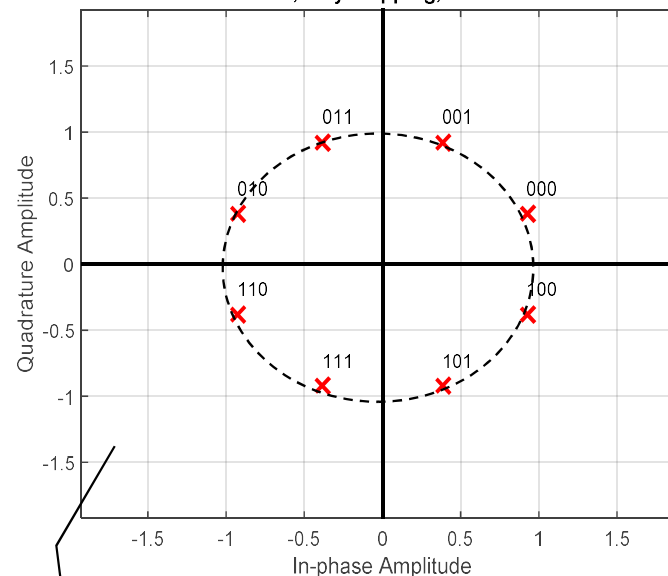
Radio signali - Kvadraturni model

Constellation: 4-PSK, Gray Mapping, PhaseOffset=0.7854rad



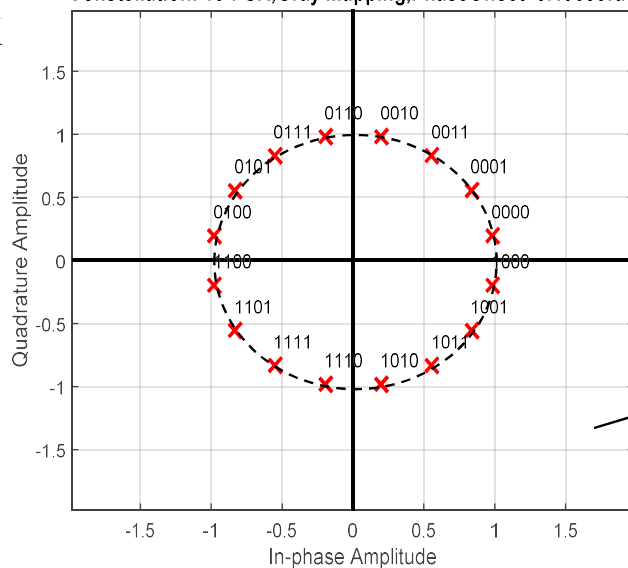
QPSK - 4 simbola na kružnici amplitude U , na rastojanju $\pi/2$

Constellation: 8-PSK, Gray Mapping, PhaseOffset=0.3927rad



8PSK - 8 simbola na kružnici amplitude U , na rastojanju $\pi/4$

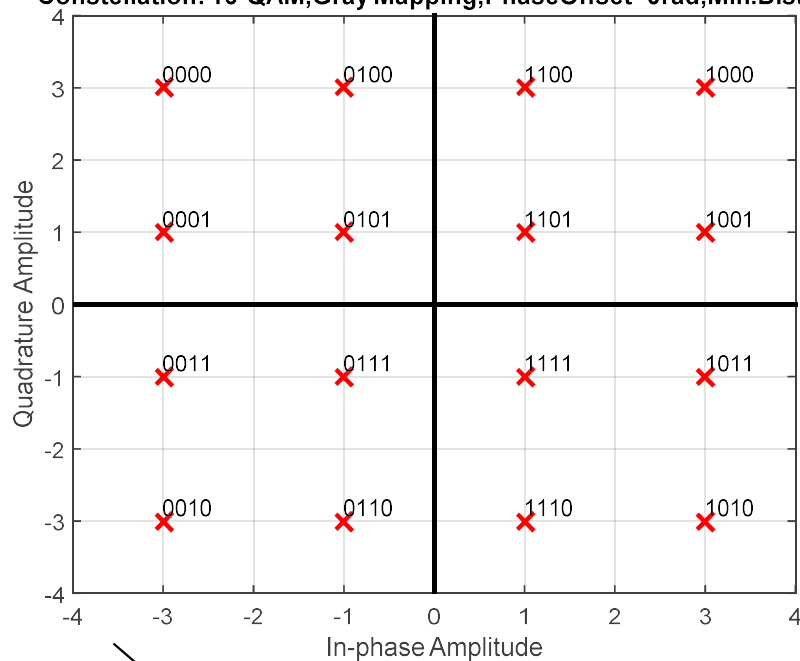
Constellation: 16-PSK, Gray Mapping, PhaseOffset=0.19635rad



16PSK - 16 simbola na kružnici amplitude U , na rastojanju $\pi/8$

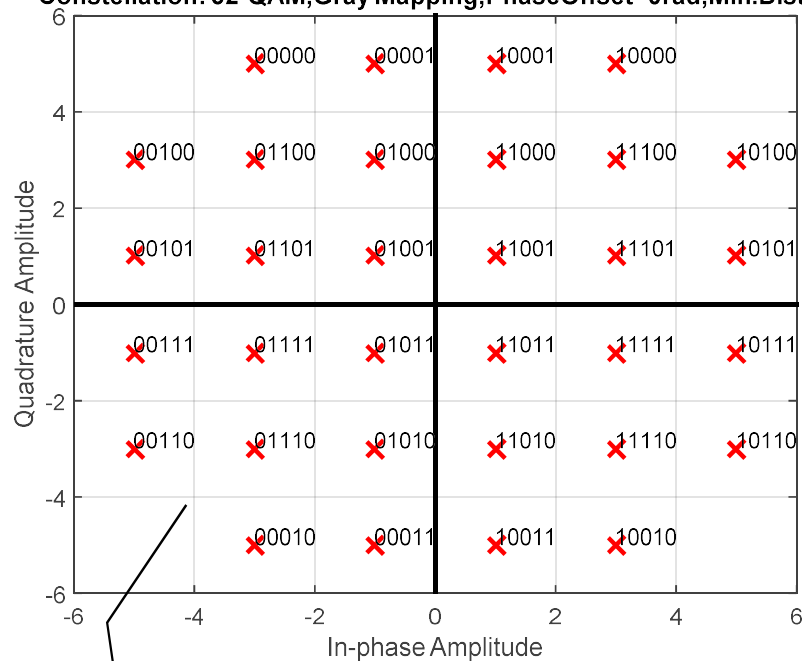
Radio signali - Kvadraturni model

Constellation: 16-QAM, Gray Mapping, PhaseOffset=0rad, Min.Dist=2



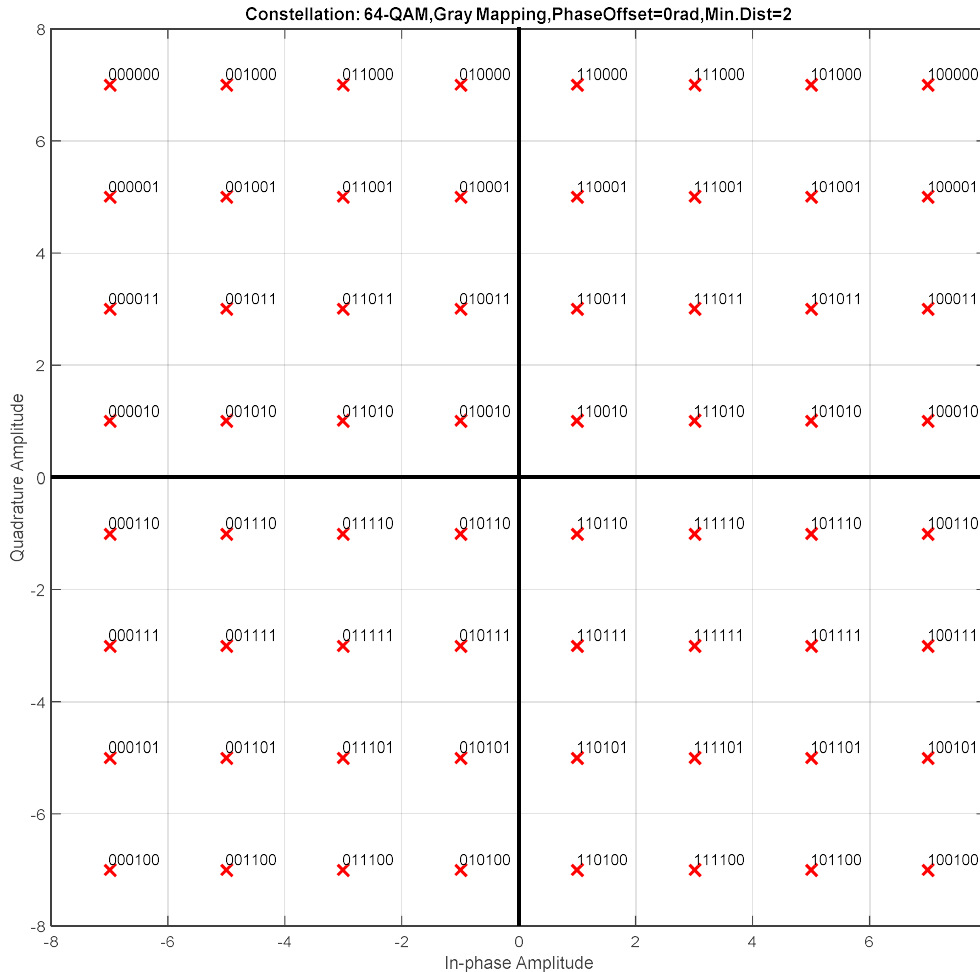
16-QAM - 16 simbola sa 4 nivoa ($\pm U$, $\pm 3U$) duž x i z ose

Constellation: 32-QAM, Gray Mapping, PhaseOffset=0rad, Min.Dist=2



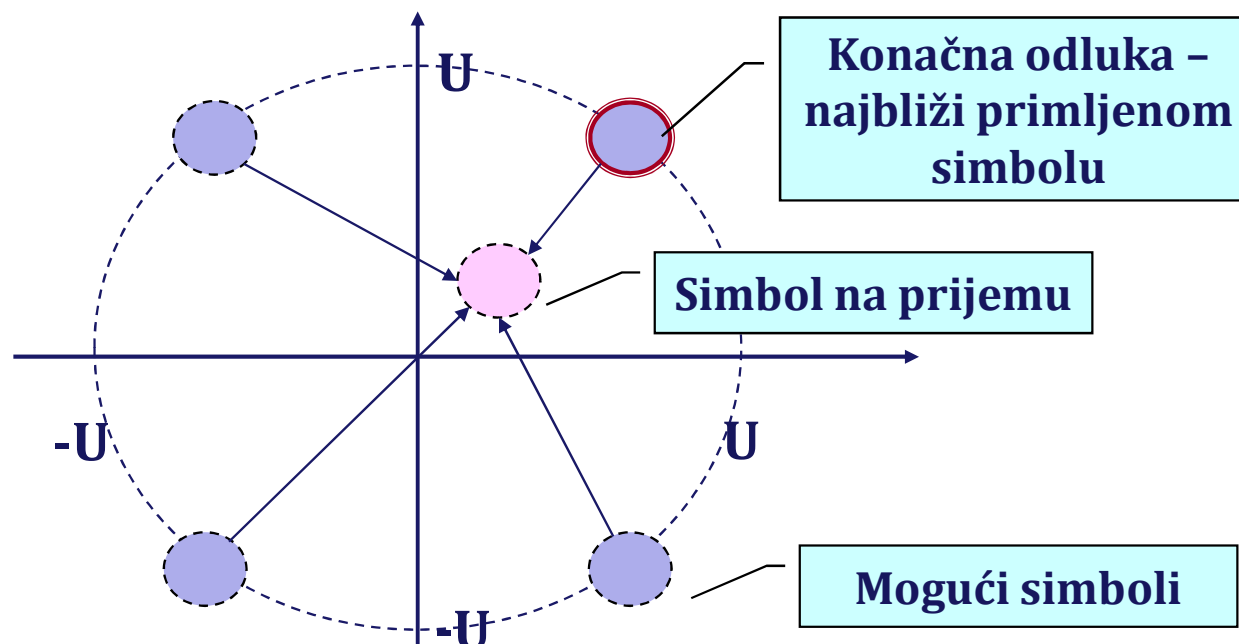
32-QAM - 32 simbola sa 6 nivoa ($\pm U$, $\pm 3U$, $\pm 5U$) duž x i y ose (4 simbola najveće snage se ne koriste)

Radio signali - Kvadraturni model



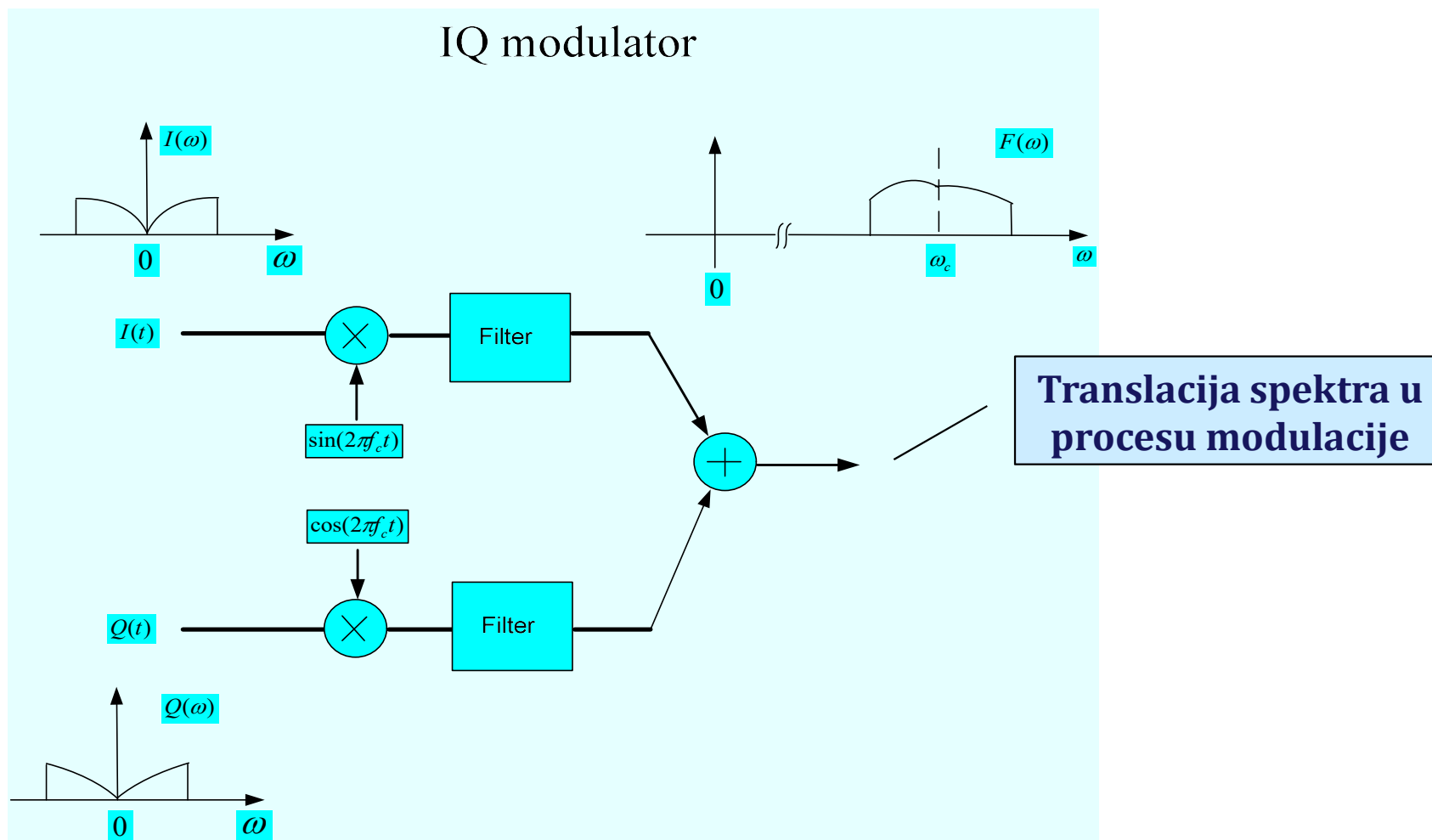
64-QAM - 16 simbola sa 4 nivoa ($\pm U, \pm 3U, \pm 5U, \pm 7U$) duž x i y ose

Radio signali - Kvadraturni model

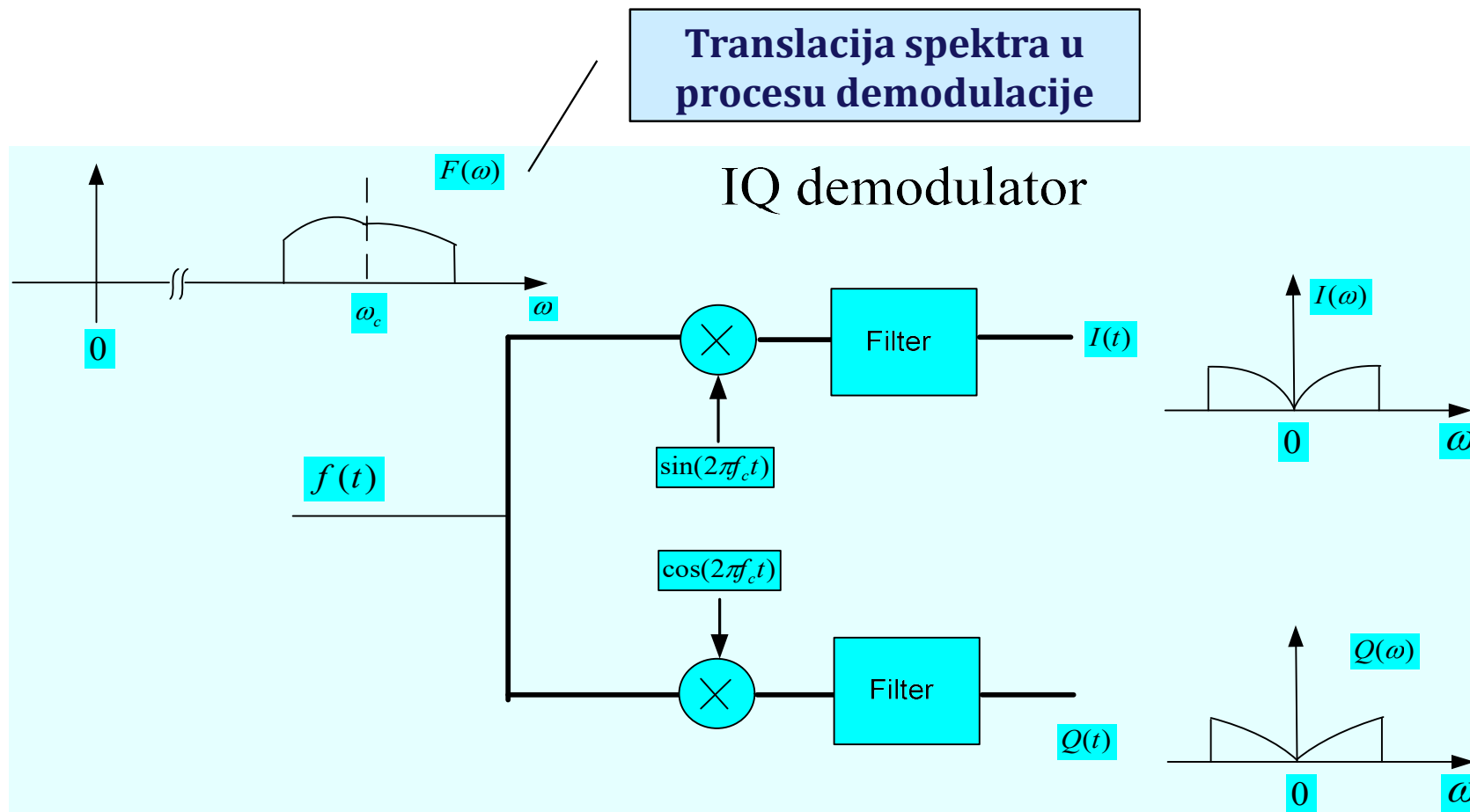


- ❖ Demapiranje – odlučivanje i deodiranje simbola u bite (svaki simbol u m bita korišćenjem istog koda kao pri mapiranju).
- ❖ Simbol na prijemu je pomeren pod uticajem šuma – mogao je da nastane od svakog od 4 simbola pod uticajem – biraemo najbliži mogući simbol, pošto je veća verovatnoća da šum ima malu nego da ima veliku amplitudu. Ipak možemo da pogrešimo (sva četiri slučaja na slici su moguća).

Radio signali - Kvadraturni model



Radio signali - Kvadraturni model



Radio signali - Kvadraturni model

$$f(t) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{a(t) \exp[\phi(t)]}_{s(t)} \times \exp[(\omega_c t)] \right\} = \operatorname{Re} \{ s(t) \exp[(\omega_c t)] \} = \underbrace{a(t) \cos[\phi(t)]}_{I(t)} \cos(\omega_c t) + \underbrace{a(t) \sin[\phi(t)]}_{Q(t)} \sin(\omega_c t)$$

$$s(t) = I(t) + jQ(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

**Kompleksna anvelopa
(obvojnica) radio signala**

$$a(t) \exp[j\phi(t)]$$

Primena FDMA

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) p(t - n\Delta)$$

Primena TDMA

$$s(t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_k(m) b_k(t - mT);$$

Primena CDMA

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Posmatramo matematički model uskopojasnog radio signala na AN.
- ❖ Prostorni kontinualni model k -tog radio signala kao funkcija kontinualne vremenske varijable t i kontinualne prostorne varijable (vektora) \mathbf{p}

$$f_k(t, \mathbf{p}) = s_k(t - \tau_p) \exp[j\omega_c(t - \tau_p)]$$

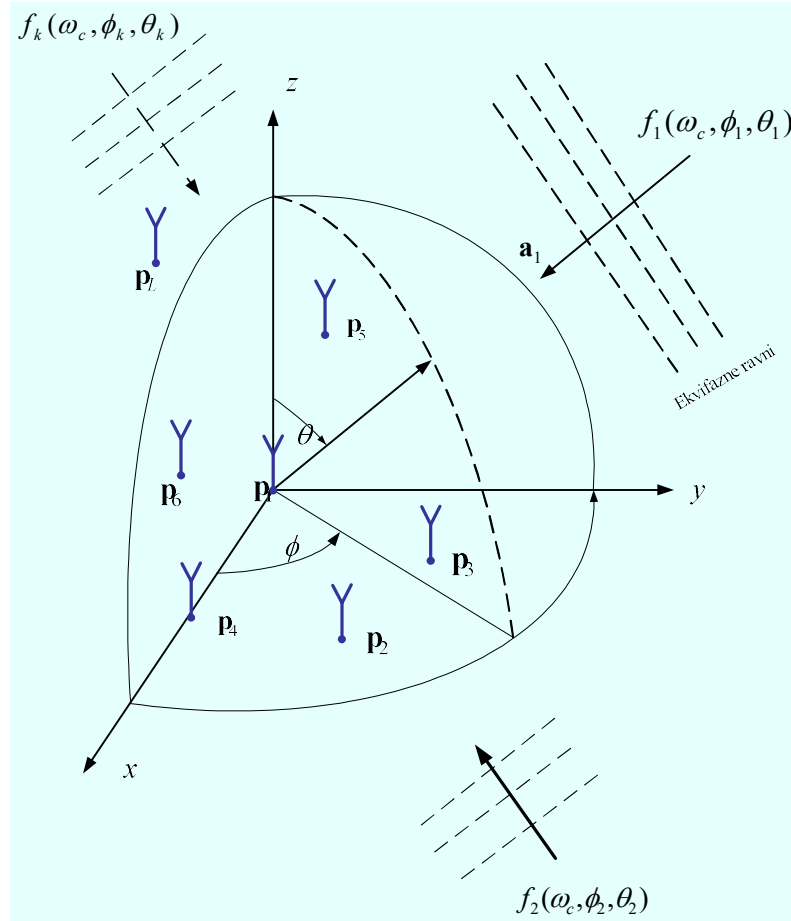
$$\tau_p = \mathbf{a}_k^T \mathbf{p} / c$$

Napomena:

U uvodnom predavanju implicitno je pretpostavljena uskopojasnost signala pošto je bilo zanemareno kašnjenje kompleksne anvelope monohromatskog ravnog talasa na antenskom nizu.

Model uskopojasnog radio signala na AN

❖ Posmatramo prostorno diskretni model uskopojasnih radio signala na AN



$$f_{lk}(t) = s_k(t - \tau_{lk}) \exp[j\omega_c(t - \tau_{lk})]$$

$$\tau_{lk} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_l / c$$

$$\mathbf{a} = [-\sin(\theta) \cos(\varphi) \quad -\sin(\theta) \sin(\varphi) \quad -\cos(\theta)]^T$$

Predpostavka uskopojasnosti

$$s_k(t - \tau_{lk}) \approx s_k(t); l = 0, 1, \dots, L - 1$$

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Pojam uskopojasnosti signala na antenskom nizu: Prva definicija
- ❖ Sa aspekta modeliranja radio signala na AN signal je uskopojasan ako se može zanemariti kašnjenje kompleksne anvelope signala tj. ukoliko važi aproksimacija:

$$s_k(t - \tau_{lk}) \approx s_k(t); l = 0, 1, \dots, L - 1$$

Kašnjenje signala na antenskom nizu se modelira faznim pomacima

$$f_{lk}(t) = s_k(t) \exp[j\omega_c(t - \tau_{lk})]$$

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Pojam uskopojasnosti signala na antenskom nizu: Druga definicija
- ❖ Radio signal na AN može se modelirati kao uskopojasni ukoliko su relativna vremenska kašnjenja pri propagaciji radio signala na AN u odnosu na referentnu antenu mnogo manja od recipročna vrednosti spektralne širine radio signala.
- ❖ **Praktična posledica:**
Ako se signal kompleksne anvelope diskretizuje po Nikvistovom kriterijumu (teorema odabiranja), tada je relativno kašnjenje signala na bilo kojoj anteni u antenskom nizu u odnosu na referentnu antenu manje od perioda diskretizacije kompleksne anvelope tako da važi pretpostavka o zanemarivanju kašnjenja kompleksne anvelope signala.

Model uskopojasnog radio signala na AN

❖ Pojam uskopojasnosti signala na antenskom nizu: Treća definicija

❖ Radio signal na antenskom nizu je uskopojasan ako ukoliko važi aproksimacija:

$$\mathbf{v}(\omega, \phi_k, \theta_k) \approx \mathbf{v}(\omega_c, \phi_k, \theta_k)$$

Navedeni uslov se odnosi na približnu kolinearnost vektora prostiranja !!

❖ **Praktična posledica:**

Uslov uskopojasnosti je ispunjen ako je normalizovana širina spektra kompleksne anvelope:

$$\frac{\Delta\omega_{BW}}{\omega_c} < 2\%$$

❖ **Primeri:**

- Radio signal širine 10 MHz na frekvenciji nosioca od 1 GHz je uskopojasan
- Akustički signal širine 4 kHz je širokopojasan

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Frekvencijska zavisnost vektora prostiranja antenskog niza čiji su vektori pozicija antena normalizovani sa zadatom talasnom dužinom

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_0) \\ \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T q_2 \frac{\mathbf{p}_0}{\lambda_g}) \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T q_2 \frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g}) \\ \vdots \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T q_2 \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{\lambda_g}) \end{bmatrix}; q_2 = \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$$

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T q_2 \frac{\mathbf{p}_0}{\lambda_g}) \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T q_2 \frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g}) \\ \vdots \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T q_2 \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{\lambda_g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T \frac{f}{f_g} \frac{\mathbf{p}_0}{\lambda_g}) \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T \frac{f}{f_g} \frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g}) \\ \vdots \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T \frac{f}{f_g} \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{\lambda_g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\mathbf{p}_0}{\lambda_g}) \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g}) \\ \vdots \\ \exp(-j 2\pi \mathbf{a}^T \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{\lambda_g}) \end{bmatrix}$$

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Funkcija neodređenosti antenskog niza po smeru dolaska i normalizovanoj frekvenciji

$$\chi(\theta_i, \phi_i, q_{2i}, \theta_j, \phi_j, q_{2j}) = \frac{\|\mathbf{v}(\theta_i, \phi_i, q_{2i})^H \mathbf{v}(\theta_j, \phi_j, q_{2j})\|}{\|\mathbf{v}(\theta_i, \phi_i, q_{2i})\| \|\mathbf{v}(\theta_j, \phi_j, q_{2j})\|}$$

$$\chi(\theta_i, \phi_i, \frac{f_i}{f_g}, \theta_j, \phi_j, \frac{f_j}{f_g}) = \frac{\|\mathbf{v}(\theta_i, \phi_i, \frac{f_i}{f_g})^H \mathbf{v}(\theta_j, \phi_j, \frac{f_j}{f_g})\|}{\|\mathbf{v}(\theta_i, \phi_i, \frac{f_i}{f_g})\| \|\mathbf{v}(\theta_j, \phi_j, \frac{f_j}{f_g})\|}$$

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Matematički model u osnovnom opsegu učestanosti (*base-band* matematički model) jednog uskopojasnih radio signala na antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije od L antena

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdot \\ x_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j\omega_c\tau_{11}) \\ \exp(-j\omega_c\tau_{21}) \\ \exp(-j\omega_c\tau_{31}) \\ \cdot \\ \exp(-j\omega_c\tau_{L1}) \end{bmatrix} s_1(t) + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \cdot \\ n_L(t) \end{bmatrix}$$

ω_c /

Učestanost nosioca (centar opsega) - ista za sve signale

$\mathbf{x}(t) \in C^{L \times 1}$

Vektor prostornih uzoraka sume kompleksnih anvelopa radio signala na AN

$\mathbf{A} \in C^{L \times 1}$

Matrica (vektor) odziva antenskog niza na dolazni radio signal

$\mathbf{s}(t)$

Kompleksna anvelope radio signala u koordinatnom početku

$\mathbf{n}(t) \in C^{K \times 1}$

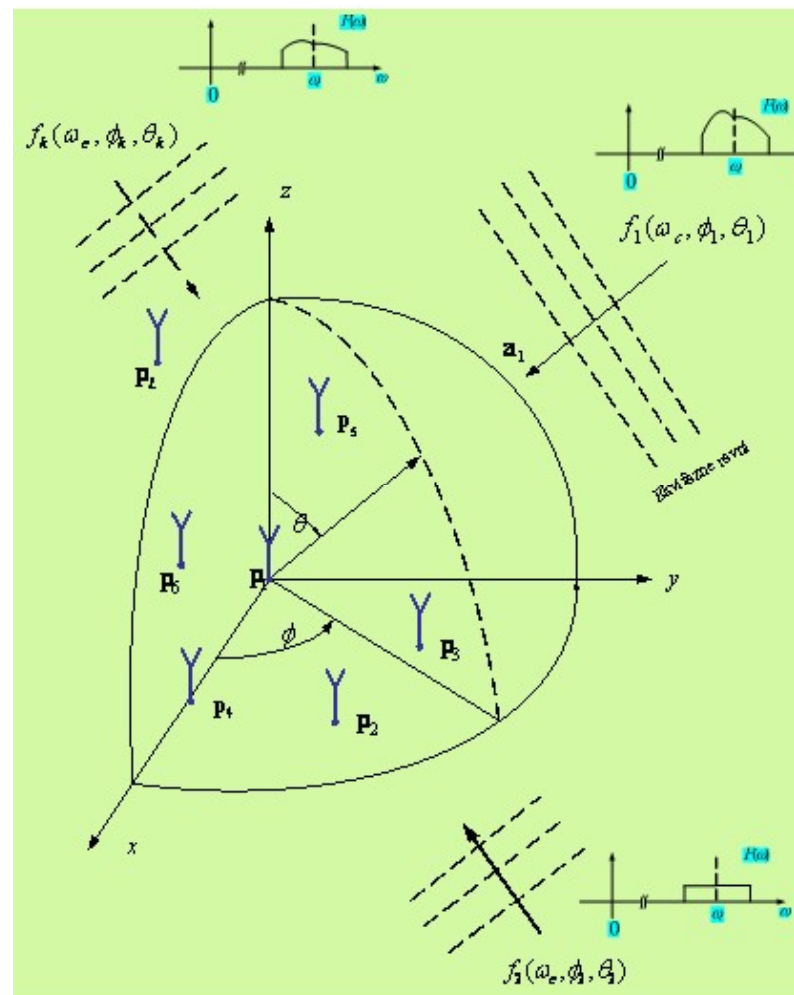
Vektor uskopojasnog Gauss-ovog šuma na antenama

$$\mathbf{a}_1(\omega_c, \phi_1, \theta_1) = [\exp(-j\omega_c\tau_{11}) \quad \exp(-j\omega_c\tau_{21}) \quad \dots \quad \exp(-j\omega_c\tau_{L1})]^T$$

Vektor prostiranja za smer dolaska signala

Model uskopojasnog radio signala na AN

- ❖ Superpozicija više uskopojasnih radio signala na istoj frekvenciji nosioca na antenskom nizu proizvoljne geometrije



Model uskopojasnog radio signala na AN

❖ *Base-band* matematički model superpozicije K uskopojasnih radio signala na antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije od L antena

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad \omega_c$$

Učestanost nosioca (centar BW) - ista za sve signale

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j\omega_c\tau_{11}) & \exp(-j\omega_c\tau_{12}) & \dots & \exp(-j\omega_c\tau_{1K}) \\ \exp(-j\omega_c\tau_{21}) & \exp(-j\omega_c\tau_{22}) & \dots & \exp(-j\omega_c\tau_{2K}) \\ \exp(-j\omega_c\tau_{31}) & \exp(-j\omega_c\tau_{32}) & \dots & \exp(-j\omega_c\tau_{3K}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(-j\omega_c\tau_{L1}) & \exp(-j\omega_c\tau_{L2}) & \dots & \exp(-j\omega_c\tau_{LK}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_L(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) \in C^{L \times 1}$$

Vektor prostornih uzoraka sume kompleksnih anvelopa signala na AN

$$\mathbf{A} \in C^{L \times K}$$

Matrica (vektor) odziva antenskog niza na dolazni radio signal

$$\mathbf{s}(t) \in C^{K \times 1}$$

Kompleksna anvelope radio signala u koordinatnom početku

$$\mathbf{n}(t) \in C^{K \times 1}$$

Vektor uskopojasnog Gauss-ovog šuma na antenama

Vektor prostiranja za smer dolaska signala

$$\mathbf{a}_k(\omega_c, \theta_k, \varphi_k) = [\exp(-j\omega_c\tau_{1k}) \quad \exp(-j\omega_c\tau_{2k}) \quad \dots \quad \exp(-j\omega_c\tau_{Lk})]^T$$

Model širokopoasnog signala na AN

❖ Matematički model širokopoasnih radio signala na antenskom nizu.

❖ Šta znači širokopoasnost na antenskom nizu:

■ Ne važi aproksimacija:

$$f_{lk}(t) = s_k(t - \tau_{lk}) \exp[j\omega_c(t - \tau_{lk})] \approx s_k(t) \exp[j\omega_c(t - \tau_{lk})]$$

$$s_k(t - \tau_{lk}) \approx s_k(t); l = 0, 1, \dots, L - 1$$

■ Vektori prostiranja za unutar spektralne širine kompleksne anvelope su frekvencijski zavisni, odnosno ne važi aproksimacija:

$$\mathbf{v}(\omega, \phi_k, \theta_k) \approx \mathbf{v}(\omega_c, \phi_k, \theta_k)$$

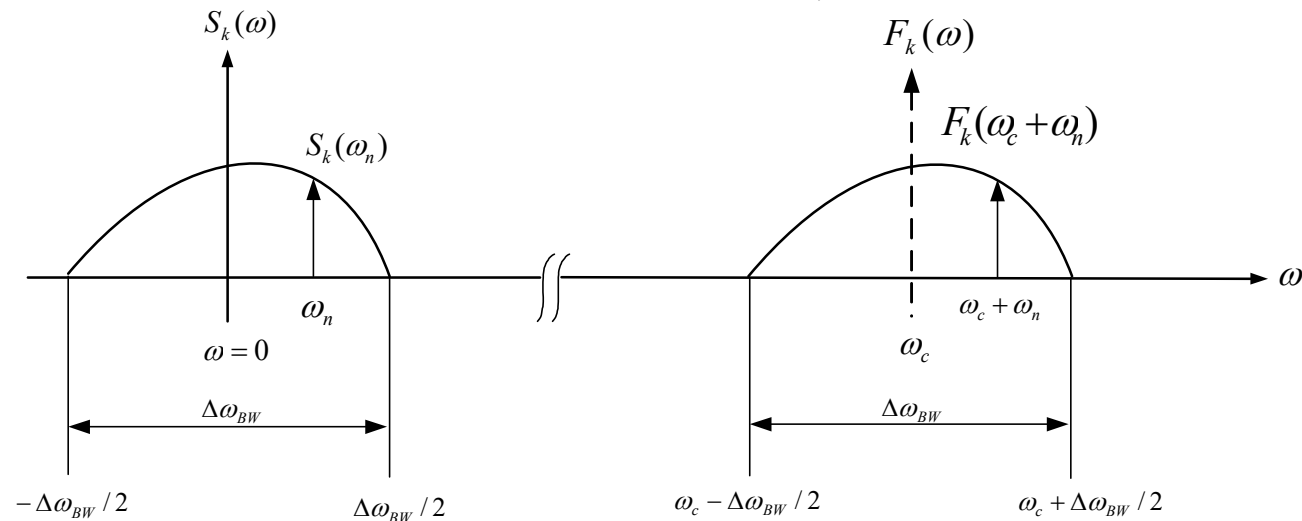
■ **Posledica:**

Matematički model širokopoasnih radio signala formira se u frekvencijskom (spektralnom) domenu.

Model širokopoasnog signala na AN

❖ Matematički model širokopoasnih radio signala na AN u frekvencijskom domenu

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^J S_k(\omega_n) \exp[j(\omega_c + \omega_n)t]$$



$$s_k(t) = \sum_{n=1}^J S_k(\omega_n) \exp(j\omega_n t)$$

- Fourije-ov red

$$t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$$

$$S_k(\omega_n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s_k(t) \exp(-j\omega_n t) dt$$

- Fourije-ovi koefcijenti

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi}{T_0} [n - (J+1)/2]$$

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega_{BW} / J = 2\pi / T_0$$

Model širokopoasnog signala na AN

❖ Normalizovani vektor prostiranja za širokopoasni radio signal

$$f \in \left(f_c - \frac{\Delta f}{2}, f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)$$

$$v_k(k, f) = \begin{bmatrix} \exp\left(-j2\pi\mathbf{a}^T \frac{f}{f_g} \frac{\mathbf{p}_0}{\lambda_g}\right) \\ \exp\left(-j2\pi\mathbf{a}^T \frac{f}{f_g} \frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-j2\pi\mathbf{a}^T \frac{f}{f_g} \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{\lambda_g}\right) \end{bmatrix} \quad v_k(k, \omega) = \begin{bmatrix} \exp\left(-j2\pi\mathbf{a}^T \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\mathbf{p}_0}{\lambda_g}\right) \\ \exp\left(-j2\pi\mathbf{a}^T \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-j2\pi\mathbf{a}^T \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{\lambda_g}\right) \end{bmatrix}$$

Model širokopoasnog signala na AN

❖ Normalizovani vektor prostiranja za širokopoasni radio signal

$$f \in (f_c - \frac{\Delta f}{2}, f_c + \frac{\Delta f}{2})$$

$$f(k) = (f_c - \frac{BW}{2} + k \frac{BW}{N}); k = 0, N-1;$$

$$\frac{f(k)}{f_A} = \frac{(f_c - \frac{BW}{2} + k \frac{BW}{N})}{f_A} = \frac{f_c}{f_A} + \frac{BW}{f_A} (\frac{k}{N} - \frac{1}{2})$$

$$q_2 = \frac{f_c}{f_A} \quad q_1 = \frac{BW}{f_A} \quad temp = \frac{k}{N} - \frac{1}{2}; k = 0, N-1;$$

Model širokopoasnog signala na AN

- ❖ Matematički model k -tog radio signala na l -toj anteni:

$$f_{lk}(t - \tau_{lk}) = s_k(t - \tau_{lk}) \exp[j\omega_c(t - \tau_{lk})] = \sum_{n=1}^J S_n(\omega_n) \exp[j(\omega_c + \omega_n)(t - \tau_{lk})]$$

- ❖ Matematički model kompleksne anvelope k -tog radio signala na l -toj anteni:

$$s_{lk}(t - \tau_{lk}) = \sum_{n=1}^J S_n(\omega_n) \exp[-j(\omega_c + \omega_n)\tau_{lk}] \exp(j\omega_n t)$$

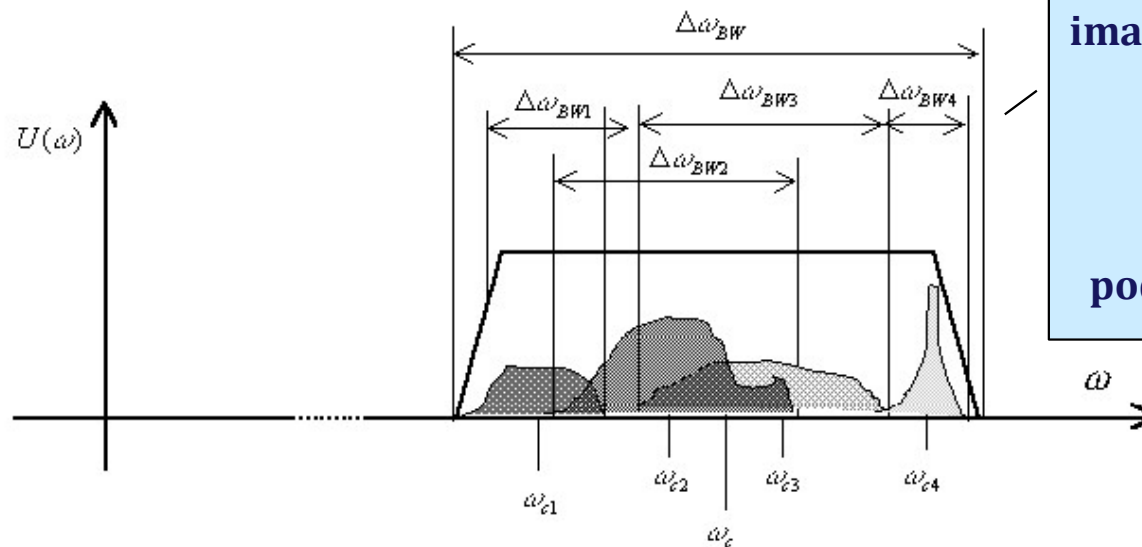
- ❖ Matematički model sume kompleksnih anvelope K radio signala na l -toj anteni:

$$x_l(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_{lk}) + n_l(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^J S_{nk}(\omega_n) \exp[-j(\omega_c + \omega_n)\tau_{lk}] \exp(j\omega_n t) + n_l(t)$$

Model superpozicije različitih signala

- ❖ **Generalizovani model istovremene superpozicije uskopojasnih i širokopojasnih radio signala u zadanom frekvencijskom podopsegu na antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije**

$$u(t) = \sum_{k=1}^K f_k(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) \exp(j\omega_{ck} t) \quad t \in (t_0, t_0 + \Delta T_0)$$

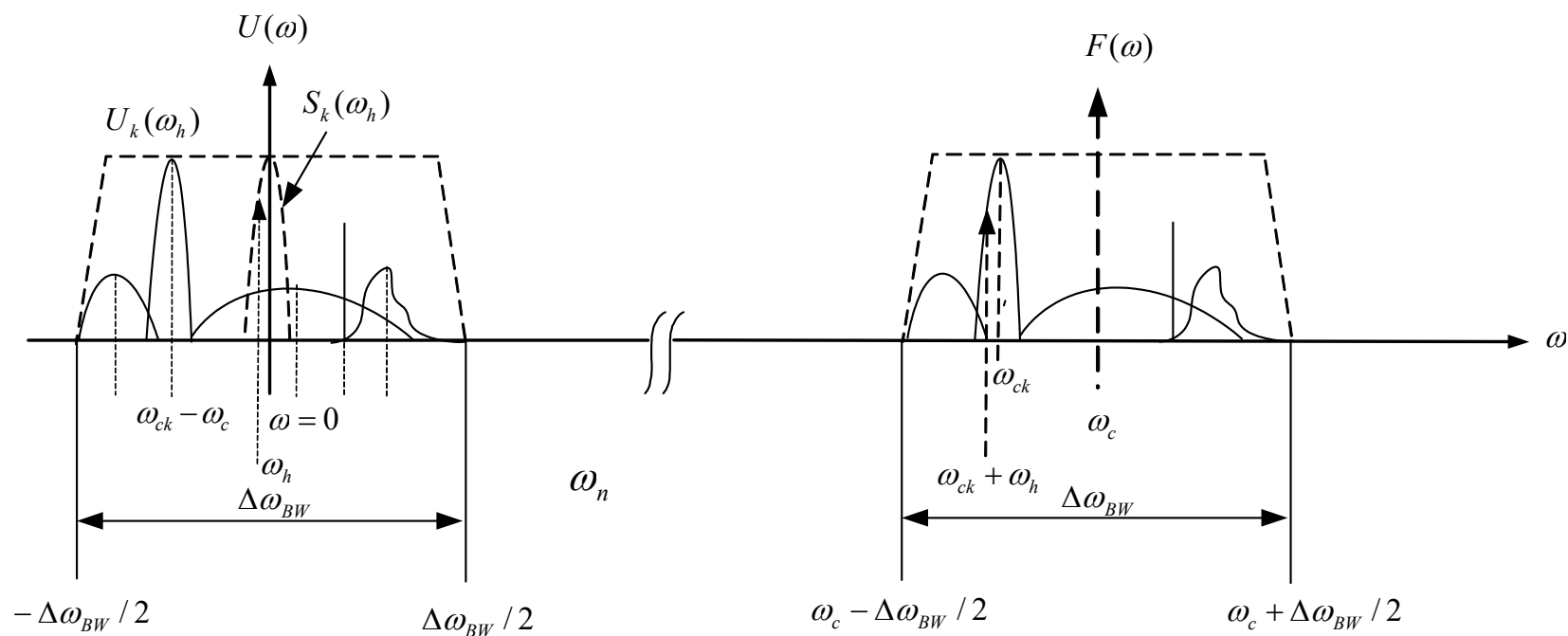


Superponirani radio signali imaju različite spektralne širine i različite frekvencije podnosioca.

Širina frekvencijskog podopsega se bira proizvoljno

Model superpozicije različitih signala

- ❖ Generalizovani model istovremene superpozicije uskopojasnih i širokopojasnih radio signala u zadatom frekvencijskom podopsegu na antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije



Model superpozicije različitih signala

- ❖ **Generalizovani model istovremene superpozicije uskopojasnih i širokopojasnih radio signala u zadatom frekvencijskom podopsegu na antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije**

$$u(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) \exp[j(\omega_{ck} - \omega_c)t] = \sum_{k=1}^K u_k(t) \quad u_k(t) = s_k(t) \exp[j(\omega_{ck} - \omega_c)t]$$

$$s_k(t) = \sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\omega_h) \exp(j\omega_h t) \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$$

$$S_k(\omega_h) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T_0} s_k(t) \exp(-j\omega_h t) dt \quad \omega_h = h \frac{\Delta\omega_{BW}}{H}; h = -H/2, H/2$$

$$U_k(\omega_h) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} s_k(t) \exp[(\omega_c - \omega_{ck})t] \exp(-j\omega_h t) dt$$

Fourijeovi koeficijenti frekvencijski pomerene kompleksne anvelope k -tog signala

$$U(\omega_h) = \sum_{k=1}^K U_k(\omega_h)$$

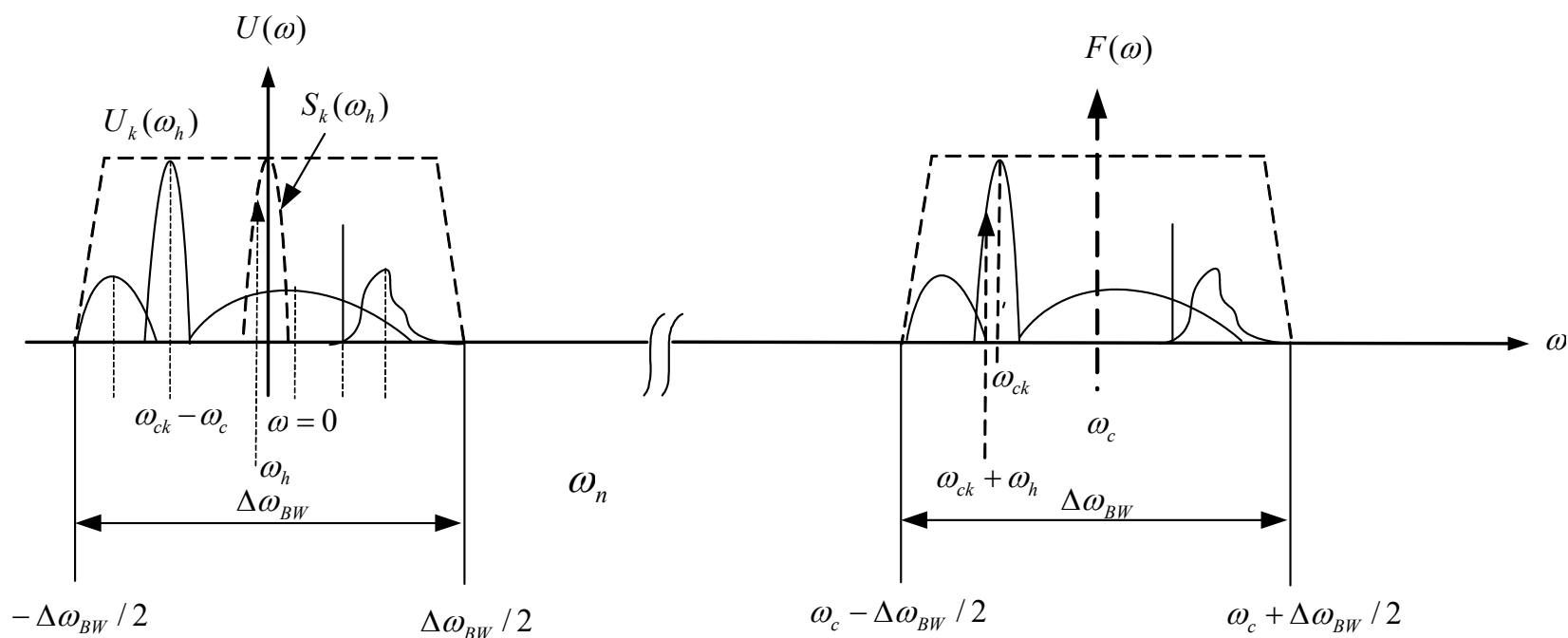
Fourijeovi koeficijenti frekvencijski superpozicije pomerenih kompleksnih anvelope K radio signala

Model superpozicije različitih signala

- ❖ **Generalizovani model istovremene superpozicije uskopojasnih i širokopojasnih radio signala u zadatom frekvencijskom podopsegu na antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije**

$$U(\omega_h) = \sum_{k=1}^K U_k(\omega_h) = \sum_{k=1}^K [S_k(\omega_h) * \delta(\omega_{ck} - \omega_c)] = \sum_{k=1}^K S_k[\omega_h - (\omega_{ck} - \omega_c)]$$

$$f_k(t) = \sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\omega_h) \exp[j(\omega_{ck}t)] \exp(j\omega_h t)$$



Model superpozicije K radio signala

- ❖ Matematički model sume pomerenih kompleksnih anvelope K radio signala na l -toj anteni

$$u_l(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\omega_h) \exp[-j(\omega_c + \omega_h)\tau_{lk}] \exp(j\omega_h t)$$

$$\tau_{lk} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_l / c \Rightarrow u_l(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\omega_h) \exp[-j(\omega_c + \omega_h) \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_l}{c}] \exp(j\omega_h t)$$

$$u_l(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\omega_h) \exp[j(\omega_c + \omega_h) \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_l}{c}] \exp(j\omega_h t)$$

$$\Delta t = \frac{1}{2f_g} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{BW}}$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\omega_h) \exp[j(\omega_c + \omega_h) \mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_l \left(\frac{2\pi}{\lambda_A \omega_g}\right)] \exp(j\omega_h t)$$

$$\Omega_h = \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}}$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\omega_h) \exp[j2\pi \left(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g}\right) \mathbf{a}_k^T \left(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g}\right)] \exp(j\omega_h t)$$

$$c = \lambda_g f_g = \frac{\lambda_g \omega_g}{2\pi}$$

Model superpozicije K radio signala

- ❖ Matematički model sume pomerenih kompleksnih anvelope K radio signala na l -toj anteni

$$\begin{aligned} U(\Omega_h) &= \sum_{n=1}^N s(n) \exp[j(\omega_c - \omega_{ck})n\Delta t] \exp(j\omega_h n\Delta t) = \sum_{n=1}^N s(n) \exp[j(\omega_c - \omega_{ck}) \frac{2\pi}{\Delta\omega_{BW}} n] \exp(j\omega_h \frac{2\pi}{\Delta\omega_{BW}} n) = \\ &= \sum_{n=1}^N s(n) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c - \omega_{ck}}{\Delta\omega_{BW}})n] \exp(j2\pi \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}} n) = \sum_{n=1}^N s(n) \exp(j2\pi\Omega_{ck} n) \exp(j2\pi\Omega_h n) = \\ &= \sum_{n=1}^N s(n) \exp(j2\pi\Omega_{ck} n) \exp(j2\pi \frac{h}{H} n) \end{aligned}$$

$$\Omega_h = \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}} = \frac{h}{H} \quad \Omega_h \in [-0.5, 0.5]$$

Model superpozicije K radio signala

❖ Generalizovani *base-band* model superpozicije K signala na l -toj anteni

$$u_l(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})] \exp(j\omega_h n \Delta t) =$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})] \exp[j2\pi(\frac{h}{H})n] =$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})] \exp[j2\pi\Omega_h n]$$

$k = 1, K;$ — k je redni broj superponiranog signala, a K je ukupan broj superponiranih signala

$h = -H/2, H/2;$ — h je redni broj spektralne komponente, H je ukupan broj spektralnih komponenti (Fourijeovih koeficijenata)

$n = 1, N;$ — n je redni broj vremenskog uzorka; N -ukupan broj vremenskih uzoraka

$l = 1, L;$ — l je redni broj antene u antenskom nizu, L ukupan broj antena u AN

Model superpozicije K radio signala

❖ Generalizovani *base-band* model superpozicije K signala na l -toj anteni

$$u_l(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})] \exp(j\omega_h n\Delta t) =$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})] \exp[j2\pi(\frac{h}{\Delta\omega_{BW}} \frac{\Delta\omega_{BW}}{H})n] =$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})] \exp[j2\pi\Omega_h n]$$

$$U_l(\Omega_h) = \sum_{n=1}^N u_l(n) \exp(-jh\frac{2\pi}{H}n) = \sum_{n=1}^N u_l(n) \exp(-j2\pi\Omega_h n)$$

Model superpozicije K radio signala

- ❖ Generalizovani *base-band* model superpozicije K signala na l -toj anteni
- ❖ Normalizacioni parametri generalizovanog modela su:

$$q_c = \frac{\omega_c}{\omega_g} = \frac{f_c}{f_g} \quad \text{Normalizovana centralna frekvencija posmatranog frekvencijskog podopsega}$$

$$\mathbf{q}_l = \frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g} \quad \text{Normalizovani vektor položaja } l\text{-te antene}$$

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega_g} \quad \text{Normalizovana kružna frekvencija}$$

$$\Omega_h = \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}} = \frac{h}{H} \quad \text{Normalizovana kružna frekvencija kompleksne anvelope}$$

$$\Omega_h \in [-0.5, 0.5]$$

Model superpozicije K radio signala

- ❖ Generalizovani *base-band* model superpozicije K signala na l -toj anteni u okviru antenskog niza
- ❖ Signal na l -toj anteni + šum l -tog prijemnog kanala su:

$$x_l(n) = u_l(n) + n_l(n)$$

- ❖ Vektor signala antenskom nizu proizvoljne poznate geometrije:

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \dots \quad x_L(n)]^T$$

Model superpozicije K radio signala

- ❖ Generalizovani *base-band* model superpozicije K radio signala na antenskom nizu u matricnoj formi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= \sum_{h=-H/2}^{H/2} [\mathbf{A}(\omega_c + \omega_h) \mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)] \exp(j2\pi\omega_h n \Delta t) = \\ & \sum_{h=-H/2}^{H/2} [\mathbf{A}(\omega_c + \omega_h) \mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)] \exp(h \frac{j2\pi}{H} n) = \\ & \sum_{h=-H/2}^{H/2} [\mathbf{A}(\omega_c + \omega_h) \mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)] \exp(j2\pi\Omega_h n)\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}(\Omega_h) = \mathbf{A}(\omega_c, \omega_h) \mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)$$

Model superpozicije K radio signala

❖ Generalizovani *base-band* model superpozicije K radio signala na antenskom nizu u matricnoj formi

$$\mathbf{X}(\Omega_h) = \mathbf{A}(\omega_c, \omega_h) \mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)$$

$$\mathbf{X}(\Omega_h) = [X_1(\Omega_h) \quad X_2(\Omega_h) \quad \dots \quad X_L(\Omega_h)]^T$$

$$\mathbf{U}(\Omega_h) = [U_1(\Omega_h) \quad U_2(\Omega_h) \quad \dots \quad U_K(\Omega_h)]^T$$

$$\mathbf{N}(\Omega_h) = [N_1(\Omega_h) \quad N_2(\Omega_h) \quad \dots \quad N_K(\Omega_h)]^T$$

$$\mathbf{a}(\omega_c, \omega_h) = \left[\exp[-j(\omega_c + \omega_h) \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_1}{c}] \quad \exp[-j(\omega_c + \omega_h) \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_2}{c}] \quad \dots \quad \exp[-j(\omega_c + \omega_h) \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{p}_L}{c}] \right]^T =$$

$$\left[\exp[-j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g}) \mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g})] \quad \exp[-j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g}) \mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_2}{\lambda_g})] \quad \dots \quad \exp[-j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g}) \mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_L}{\lambda_g})] \right]^T =$$

$$\left[\exp[-j2\pi(\frac{f_c}{f_g} + \frac{f_h}{f_g}) \mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g})] \quad \exp[-j2\pi(\frac{f_c}{f_g} + \frac{f_h}{f_g}) \mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_2}{\lambda_g})] \quad \dots \quad \exp[-j2\pi(\frac{f_c}{f_g} + \frac{f_h}{f_g}) \mathbf{a}_k^T(\frac{\mathbf{p}_L}{\lambda_g})] \right]^T =$$