ANTENSKI NIZOVI U TELEKOMUNIKACIONIM SISTEMIMA

(13M031ANT)

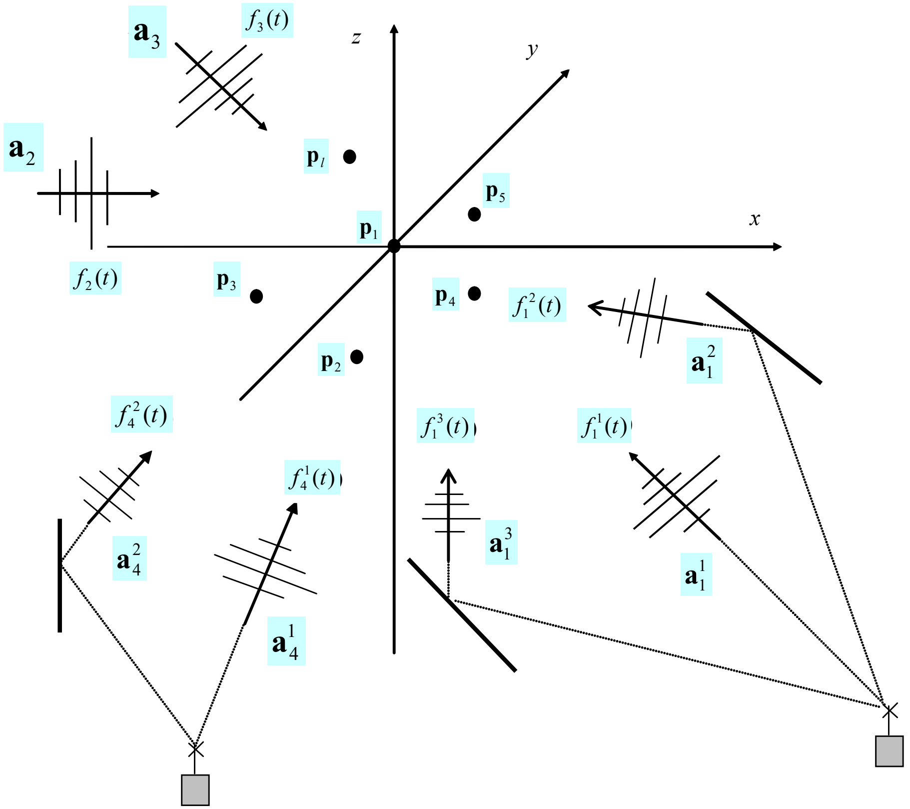
Matematički modeli radio signala na antenskom nizu – Uticaj *multipath* propagacije

Elektrotehnički fakultet – Univerzitet u Beogradu
Odsek za telekomunikacije i informacione tehnologije
Katedra za telekomunikacije
prof. Goran Marković (korišćeni su materijali prof. Miljka Erića)

2024/2025

Matematički model signala na AN - *Multipath*

❖ **Posmatramo matamatički model signala na AN u uslovima višestrukog prostiranja signala (*multipath*)**



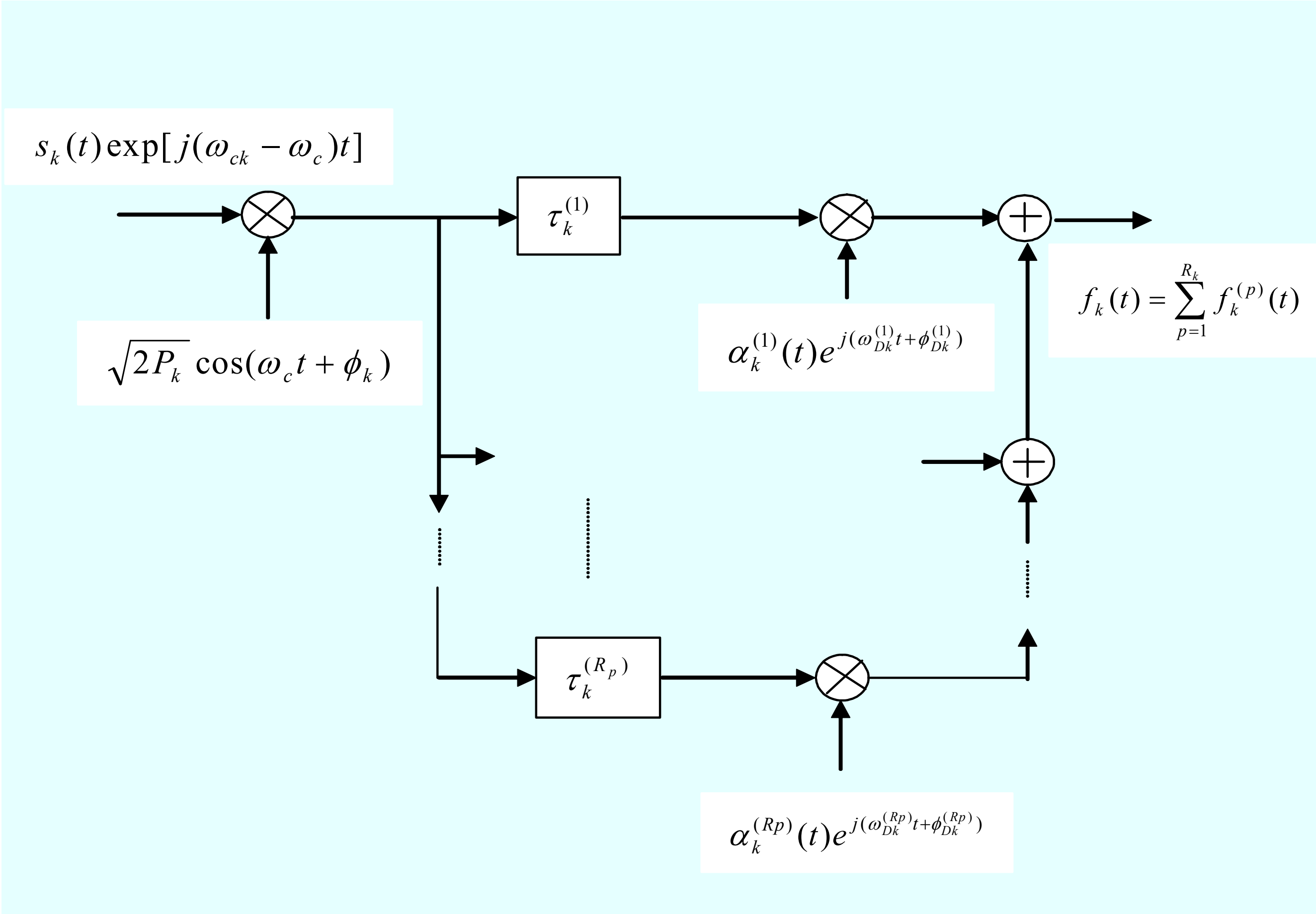
$$f_k(t) = \sum_{p=1}^{R_k} f_k^{(p)}(t)$$

$$f_k^{(p)}(t)$$

Signal *p*-te replike, *p* označava redni broj replike, a R_k ukupan broj superponiranih replika *k*-tog radio signala.

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Matematički model kanala sa višestrukim prostiranjem**



Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Matematički model radio signala sa višestrukim prostiranjem u referentnoj tački može se prikazati na sledeći način**

$$f_k(t)=\sum_{p=1}^{Rp}\alpha_k^{(p)}(t)s_k[t-\tau_k^{(p)}(t)]\exp[j(\omega_{ck}-\omega_c)t]\exp[j(\omega_c t+\omega_c\tau_k^{(p)}(t)+\omega_{Dk}^{(p)}(t)t]$$

$$f_k(t)=\sum_{p=1}^{R_k}\alpha_k^{(p)}(t)s_k[t-\tau_k^{(p)}(t)]\exp[-j\omega_c\tau_k^{(p)}(t)]\exp[j(\omega_{ck}-\omega_c)t]\exp([j\omega_{Dk}^{(p)}(t)t]\exp(j\omega_c t)$$

- **Pretpostavimo da se vremeska kašnjenja, Doppler-ovi pomaci i slabljenje replika vremenski ne menjaju unutar opservacionog intervala ΔT_0 tako da važi aproksimacija:**

$$\tau_k^{(p)}(t)\approx\tau_k^{(p)}$$

$$\omega_{Dk}^{(p)}(t)\approx\omega_{Dk}^{(p)}$$

$$\alpha_k^{(p)}(t)\approx\alpha_k^{(p)}$$

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Pomerena kompleksna anvelopa *p*-te replike *k*-tog signala $u_k^{(p)}(t)$ se može izraziti na sledeći način:**

$$u_k^{(p)}(t) = \alpha_k^{(p)} s_k[t - \tau_k^{(p)}]\exp[-j\omega_c \tau_k^{(p)}]\exp[j(\omega_{ck} - \omega_c)t]\exp(j\omega_{Dk}^{(p)} t)$$

- **Kompleksna anvelopa *p*-te replike se može tada izraziti kao:**

$$s_k(t - \tau_k^{(p)}) = \sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\omega_h)\exp(-j\omega_h \tau_k^{(p)})\exp(j\omega_h t)$$

- **Sledi da se pomerena kompleksna anvelopa *p*-te replike *k*-tog signala $f_k^{(p)}(t)$ na referentnoj anteni (dobijana IQ demodulacijom signala $u_k(t)$) može izraziti na sledeći način:**

$$u_k^{(p)}(t) = \alpha_k^{(p)} \exp(-j\omega_c \tau_k^{(p)})\exp[j(\omega_{ck} - \omega_c)t]\exp(j\omega_{Dk}^{(p)} t) \times$$
$$\times \sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\omega_n)\exp(-j\omega_n \tau_k^{(p)})\exp(j\omega_h t)$$

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Nakon diskretizacije signala u vremenu na intervalima *Δt* dobija se pomerena kompleksna anvelopa *p*-te replike *k*-tog radio signala kao**

$$\Delta t = \frac{1}{2f_g} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{BW}}$$

$$u_k^{(p)}(n\Delta t) = \alpha_k^{(p)} \exp(-j\omega_c \tau_k^{(p)}) \exp[j(\omega_{ck} - \omega_c) n\Delta t] \exp(j\omega_{Dk}^{(p)} n\Delta t) \times$$

$$\times \sum_{h=H/2}^{H/2} S_k(\omega_h) \exp(-j\omega_h \tau_k^{(p)}) \exp(j\omega_h n\Delta t)$$

- **Uvodimo pojam normalizovanog vremenskog kašnjenja:**

$$\tau_{k,norm}^{(p)} = \frac{\tau_k^{(p)}}{\Delta t} = \frac{\tau_k^{(p)} \Delta\omega_{BW}}{2\pi}$$

$$u_k^{(p)}(n) = \alpha_k^{(p)} \exp(-j2\pi \frac{\omega_c}{\Delta\omega_{BW}} \tau_{k,norm}^{(p)}) \exp[j2\pi (\frac{\omega_{ck} - \omega_c}{\Delta\omega_{BW}}) n] \exp(j2\pi \frac{\omega_{Dk}^{(p)}}{\Delta\omega_{BW}} n) \cdot$$

$$\sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\omega_h) \exp(-j2 \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}} \pi\Omega_h \tau_{k,norm}^{(p)}) \exp(j2\pi \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}} n)$$

Matematički model signala na AN - *Multipath*

❖ **Budući da je,**

$$\omega_h = h\frac{\Delta\omega_{BW}}{H};\;\; h=-H/2,\; H/2 \;\textbf{i}\; \Omega_h = \frac{\omega_h}{\Delta\omega_{BW}} = \frac{h}{H}$$

imamo da je:

$$u_k^{(p)}(n) = \alpha_k^{(p)} \exp(-j2\pi\frac{\omega_c}{\Delta\omega_{BW}}\tau_{k,norm}^{(p)})\exp[j2\pi\Omega_{ck}n]\exp(j2\Omega_{Dk\,h}^{(p)}n)\times$$

$$\times\sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\Omega_h)\exp(-j2\pi\Omega_h\tau_{k,norm}^{(t)})\exp(j2\pi\Omega_h n)$$

❖ **Veličina:**

$$\Omega_{Dk\;h}^{(p)} = \frac{\omega_{Dk}^{(p)}}{\Delta\omega_{BW}}$$

predstavlja *normalizovani Doppler*-ov *pomak p*-te replike *k*-tog signala

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Ukupni signal na *l*-toj anteni je rezultat superpozcije *K* radio signala pri čemu je *k*-ti signal rezultat superpozicije R_k replika (dakle ukupno se superponira suma R_k za *k* = 1, ..., *K*), i može se izraziti kao:**

$$u_l(n) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{R_p(k)} u_k^{(p)}(n) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{R_p(k)} \sum_{h=-H/2}^{H/2} U_k^{(p)}(\Omega_h) \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_A} + \frac{\omega_h}{\omega_A}) \mathbf{a}_k^T (\frac{\mathbf{p}_l}{\lambda_g})]$$

- **Ako uzmemo u obzir i šum na antenama, signal na *l*-toj anteni je:**

$$x_l(n) = f_l(n) + n_l(n)$$

- **Vektor uzoraka signala na antenskon nizu $x(n) = [x_1(n) \ldots x_L(n)]^T$ se u uslovima višestrukog prostiranja može izraziti u matričnoj formi:**

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{h=-H/2}^{H/2} \left[\mathbf{A}(\omega_c + \omega_h)\mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)\right] \exp(j2\pi\omega_h n\Delta t) =$$

$$= \sum_{h=-H/2}^{H/2} \left[\mathbf{A}(\omega_c + \omega_h)\mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)\right] \exp(h\frac{j2\pi}{H}n) = \sum_{h=-H/2}^{H/2} \left[\mathbf{A}(\omega_c + \omega_h)\mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)\right] \exp(j2\pi\Omega_h n)$$

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Generalizovani model superpozicije radio signala na AN u uslovima višestrukog prostiranja se može izraziti u matričnoj formi u frekvencijskom domenu kao:**

$$\mathbf{X}(\Omega_h) = \mathbf{A}(\omega_c, \omega_h)\mathbf{U}(\Omega_h) + \mathbf{N}(\Omega_h)$$

- **U prethodnom izrazu** $\mathbf{X}(\Omega_h)=\left[X_1(\Omega_h)\ X_2(\Omega_h)\ \cdots X_L(\Omega_h)\right]^T \in C^{L\times 1}$ **predstavlja vektor spektralnih komponenti uzoraka signala na AN.**
- **Vektor:**

$$\mathbf{U}(\Omega_h)=\left[U_1^{(1)}(\Omega_h)\ U_1^{(2)}(\Omega_h)\cdots U_1^{(R_1)}(\Omega_h)\ \cdots\ U_K^{(1)}(\Omega_h)\ U_K^{(2)}(\Omega_h)\cdots U_K^{(R_K)}(\Omega_h)\right]\in C^{\sum_{k=1}^{K} R_p\times 1}$$

je vektor spektralnih komponenti pomerenih kompleksnih anvelopa superponiranih signala. Dimenzija ovog vektora je jednaka sumi svih replika svih *K* međusobno nekorelisanih signala, odnosno:

$$\sum_{k=1}^{K} R_p \times 1$$

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Spektar pomerene kompleksne anvelope *p*-te replike *k*-tog signala u referentnoj tački prostora, dobija se Fourijerovom transformacijom kompleksne anvelope $u_k^{(p)}(n)$ i izražava se kao:**

$$U_k^{(p)}(\Omega_h) = \sum_{n=1}^{N} u_k^{(p)}(n) \exp(-j2\pi\Omega_h n) =$$

$$\sum_{n=1}^{N} [\alpha_k^{(p)} \exp(-j2\pi \frac{\omega_c}{\Delta\omega_{BW}} \tau_{k,norm}^{(p)}) \exp[j2\pi\Omega_{ck} n] \exp(j2\Omega_{Dk\,h}^{(p)} n) \cdot$$

$$\sum_{h=-H/2}^{H/2} S_k(\Omega_h) \exp(-j2\pi\Omega_h \tau_{k,norm}^{(t)}) \exp(j2\pi\Omega_h n)] \exp(-j2\pi\Omega_h n)$$

- **Ovaj spektar pomerene kompleksne anvelope *p*-te replike *k*-tog signala u referentnoj tački prostora može se izraziti preko kompleksne anvelope:**

$$U_k^{(p)}(\Omega_h) = S_k(\Omega_h - \Omega_{ck} - \Omega_{Dk}^{(p)}) \exp(-j \frac{\omega_c}{\Delta\omega_{BW}} \tau_{k,norm}^{(p)})$$

Matematički model signala na AN - *Multipath*

- **Vektor** $\mathbf{N}(\Omega_h) = [N_1(\Omega_h)\ N_2(\Omega_h) \cdots\ N_K(\Omega_h)]^T$ **je vektor spektralnih komponenti uzoraka šuma na antenama.**
- **Matrica** $\mathbf{A}(\omega_\mathbf{c}, \omega_h)$ **ima dimenziju** $L \times \sum_{k=1}^{K} R_k$ **.**
- **Kolona ove matrice su vektori prostiranja superpoiranih radio signala, koji se mogu odrediti na sledeći način,**

$$\mathbf{a}(\omega_c, \omega_h) = \left[\exp[j(\omega_c + \omega_h)\frac{\mathbf{a}_k^{(p)^T}\mathbf{p}_1}{c}] \quad \exp[j(\omega_c + \omega_h)\frac{\mathbf{a}_k^{(p)^T}\mathbf{p}_2}{c}] \quad ... \quad \exp[j(\omega_c + \omega_h)\frac{\mathbf{a}_k^{(p)^T}\mathbf{p}_L}{c}] \right]^T =$$

$$\left[\exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^{(p)^T}(\frac{\mathbf{p}_1}{\lambda_g})] \quad \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^{(p)^T}(\frac{\mathbf{p}_2}{\lambda_g})] \quad .. \quad \exp[j2\pi(\frac{\omega_c}{\omega_g} + \frac{\omega_h}{\omega_g})\mathbf{a}_k^{(p)^T}(\frac{\mathbf{p}_L}{\lambda_g})] \right]^T$$

gde $a_k^{(p)}$ predstavlja jedinični vektor smera dolaska *p*-te replike *k*-tog signala.