

Merna nesigurnost II

29.10.2020.

Greška merenja

- Klasični oblik izražavanja tačnosti koristi termin „greška merenja“.
- U metrologiji greška merenja (*error of a measurement*) se definiše kao razlika izmerene $X_{(M)}$ i stvarne vrednosti $X_{(S)}$:

$$\Delta_X = X_{(M)} - X_{(S)} \quad \text{apsolutna greška}$$

$$\delta_X = (X_{(M)} - X_{(S)}) / X_{(S)} \quad \text{relativna greška}$$

Apsolutna i relativna greška mogu biti i pozitivne i negativne.

Greška merenja

- Različite pojave koje deluju na proces merenja u trenutku merenja prouzrokuju razliku između tačne i izmerene vrednosti.
- Slučajni i sistematski “deo” greške:** pri ponavljanju merenja slučajni “deo” se menja, a sistematski “deo” se ne menja.
- Ako su uticaji na merenje sistematski i njihov uticaj je poznat, onda je moguće korigovati rezultat. Pri tome mali deo sistematske greške ostaje i nakon korekcije.

Greška merenja

Osnovni problem u klasičnom definisanju greške je to što tačna vrednost nije poznata!

Tačna vrednost se sa nekom verovatnoćom nalazi u opsegu oko izmerene vrednosti. Širina tog opsega je informacija o **vernoj nesigurnosti**.

Greška – teoretski koncept

Merna nesigurnost – praktični koncept

Vodič za mernu nesigurnost

- 1993. je Internacionalna organizacija za standardizaciju (*International Standard Organization - ISO*) izdala Vodič za izražavanje nesigurnosti merenja (*Guide to the Expression of Uncertainty of Measurements, "GUM"*)
 - *International Bureau of Weights and Measures (BIPM)*
 - *International Electrotechnical Commission (IEC)*
 - *International Federation of Clinical Chemistry (IFCC)*
 - *International Organization for Standardization (ISO)*
 - *International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC)*
 - *International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP)*
 - *International Organization of Legal Metrology (OIML)*
- Standardizacija terminologije, notacije i izražavanja nesigurnosti – osnova za poređenje rezultata
- Korigovan i ponovo objavljen 1995, pa 2008.

Šta je merna nesigurnost?

Merna nesigurnost je parametar koji se pridružuje rezultatu merenja i koji karakteriše disperziju vrednosti koja odgovara merenoj veličini.

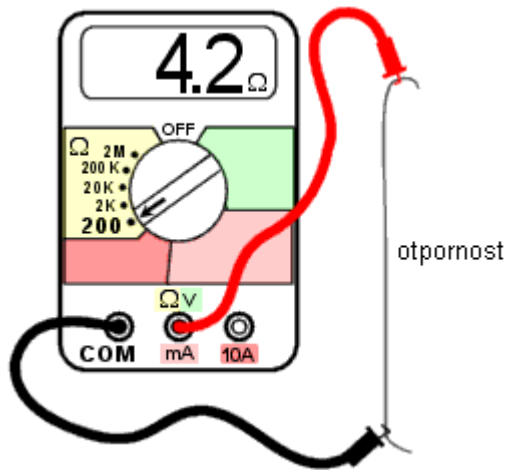
“parameter, associated with the result of a measurement, that characterizes the dispersion of the values that could reasonably be attributed to the measurand”

International Vocabulary of Metrology (VIM)

Zašto proučavati mernu nesigurnost?



- Zadatak na ispitu



- Cilj merenja: da pokaže kvantitet „pojave“ od interesa. **Rezultat merenja nije kompletan ako sa sobom ne nosi informaciju o mernoj nesigurnosti.**

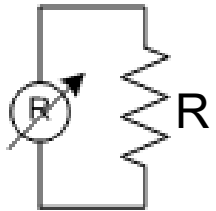
Rezultat merenja:

izmerena vrednost \pm merna nesigurnost

Direktno i indirektno merenje

DIREKTNO merenje

Primer:

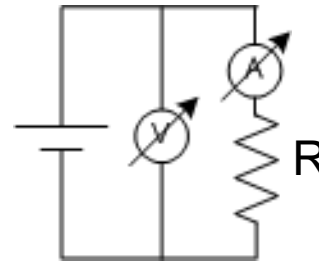


Otpornost
R se meri
ommetrom

Merna nesigurnost zavisi
od pokazivanja i
specifikacija samo jednog
mernog instrumenta

INDIREKTNO merenje

Primer:



Otpornost R se
izražava u funkciji
napona U i struje I
koji se mere
pomoću voltmetra i
ampermetra:

$$R = f(U, I) = \frac{U}{I}$$

U opštem slučaju indirektnog
merenja, definiše se **model
merenja**:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Izlazna
veličina

Ulazne veličine
Direktno se mere

Indirektno se meri

Indirektno merenje – model merenja

- x_1, x_2, \dots, x_N su procenjene vrednosti za ulazne veličine X_1, X_2, \dots, X_N

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad \text{Model merenja}$$

Procenjena
vrednost izlazne
veličine

Procenjene vrednosti ulaznih veličina
(*direktno izmerene*)

- Merna nesigurnost izlazne veličine se dobija matematičkim kombinovanjem nesigurnosti procenjenih ulaznih veličina – **propagacija nesigurnosti**.

Indirektno merenje – model merenja

- Uobičajeni pristup u izražavanju nesigurnosti je u obliku procene standardne devijacije (standardna merna nesigurnost).
- Standardna merna nesigurnost za procenjenu ulaznu veličinu x_i se označava sa $u(x_i) = \sigma_i$.

Indirektno merenje – model merenja

- Standardna merna nesigurnost procenjene izlazne veličine y dobijena propagacijom nesigurnosti naziva se **kombinovana standardna merna nesigurnost**.
- Kombinovana standardna merna nesigurnost procenjene izlazne veličine y se označava sa $u_c(y)$ (izvedena je iz Tejlorovog reda):

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

koeficijent osetljivosti

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)$$

standardna merna nesigurnost za x_j

$$r(x_i, x_j) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2}}$$

Koeficijent korelacije
 $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$

Indirektno merenje – model merenja

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)$$

$$r(x_i, x_j) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2}}$$

Koeficijent korelacije

Nekorelisane x_i i x_j

$$r(x_i, x_j) = 0$$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

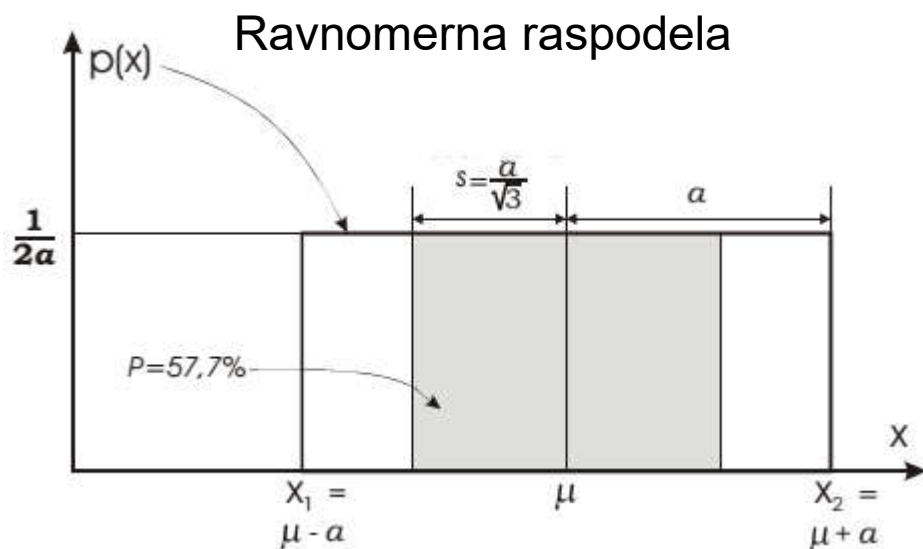
Korelisane x_i i x_j

$$r(x_i, x_j) = 1$$

$$u_c(y) = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right|$$

Gustina raspodele verovatnoća i funkcija raspodele verovatnoća

- Jedna od osnovnih postavki u *GUM*-u je da se svakom podatku o mernoj nesigurnosti pridruži neka **funkcija raspodele** i **verovatnoća** koja odgovara tom podatku.



Primena: ako ne postoji iskustvo ili drugo saznanje o grupisanju rezultata oko srednje vrednosti.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \mu - a \leq x \leq \mu + a \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

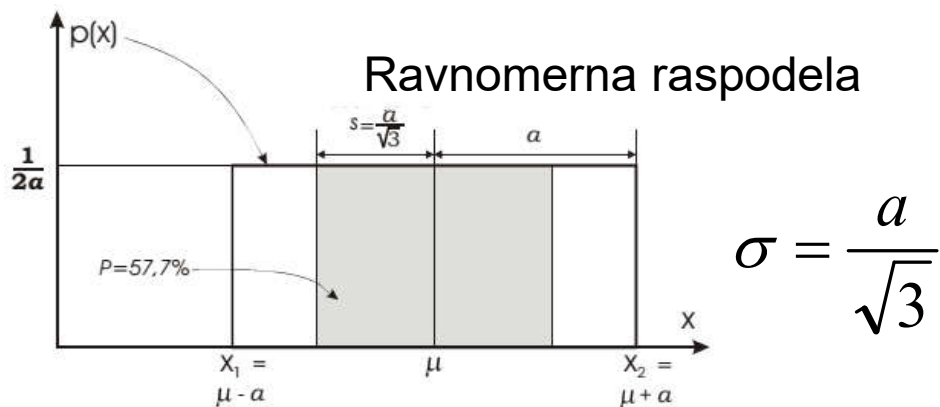
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} \Rightarrow \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

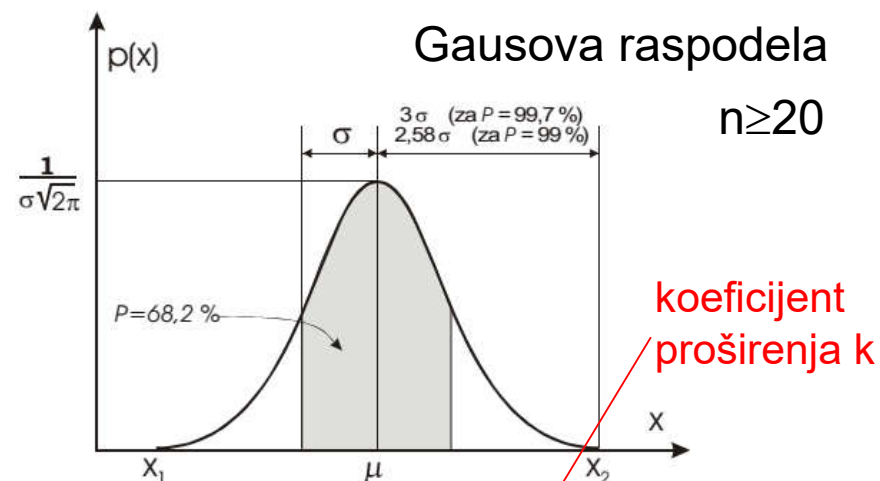
$$P = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} p(x)dx = 57.7\%$$

Gustina raspodele verovatnoća i funkcija raspodele verovatnoća



$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 57.7\%$$

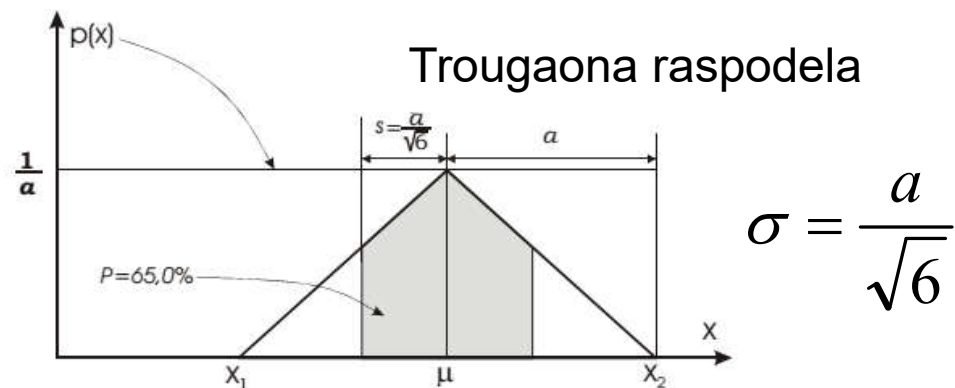
$$P(\mu - \sqrt{3}\sigma \leq x \leq \mu + \sqrt{3}\sigma) = 100\%$$



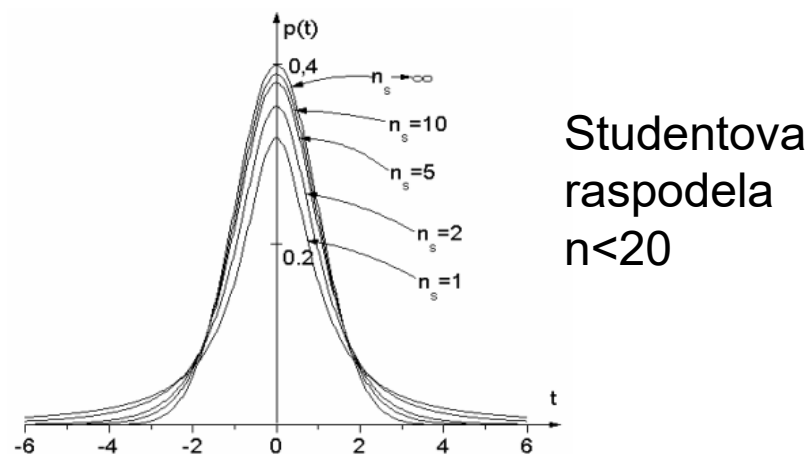
$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 95\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 99.7\%$$



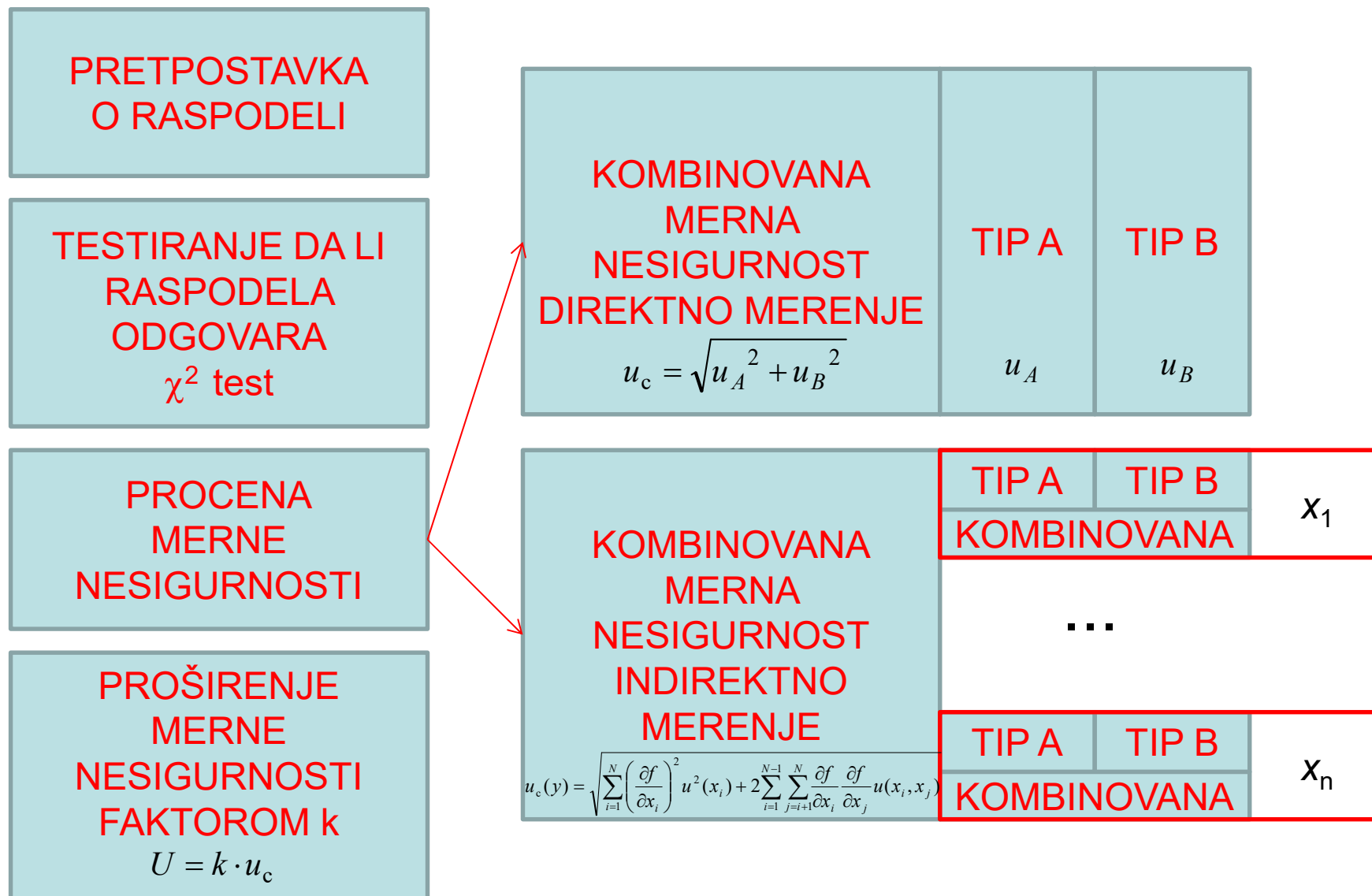
$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 65\%$$



Merna nesigurnost

- Tip A procene merne nesigurnosti – metod procene koji se **zasniva na statističkoj analizi** serije ponovljenih merenja
- Tip B procene merne nesigurnosti – metod procene koji se **zasniva na svemu ostalom** osim direktne statističke analize serije ponovljenih merenja

Kombinovana merna nesigurnost



Direkno i indirektno merenje – kombinovana merna nesigurnost

DIREKTNO merenje

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

INDIREKTNO merenje

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Izlazna
veličina

Ulazne veličine

Direktno se mere

Indirektno se meri

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)$$

$$r(x_i, x_j) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2}}$$

$$u(x_i) = \sqrt{u_A(x_i)^2 + u_B(x_i)^2}$$

Merna nesigurnost tipa A

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Standardna devijacija srednje vrednosti merenja je procena standardne merne nesigurnosti tipa A

Merna nesigurnost tipa B

- Procenjuje se na osnovu znanja o mernoj metodi i postupku merenja, o karakteristikama instrumenata i svim ostalim podacima (osim uračunatog kroz nesigurnost tipa A)
- U osnovnim električnim merenjima, uglavnom se svodi na nesigurnost koja potiče od tačnosti samih instrumenata
- Procenjuje se na osnovu podataka koje navedu proizvođači instrumenata

Pri svemu ovome se podrazumeva da se merenje vrši pri propisanim radnim uslovima proizvođača!

Merna nesigurnost tipa B

Analogni instrumenti – nesigurnost očitavanja

- Proizvođač navodi podatak o klasi tačnosti K ,
- obavezno je da bude navedena na samom instrumentu,
- izračunava se podatak o maksimalnoj apsolutnoj greški Δ_x koju instrument pravi na nekom opsegu M
- Standardima su definisane klase tačnosti 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 5 %.

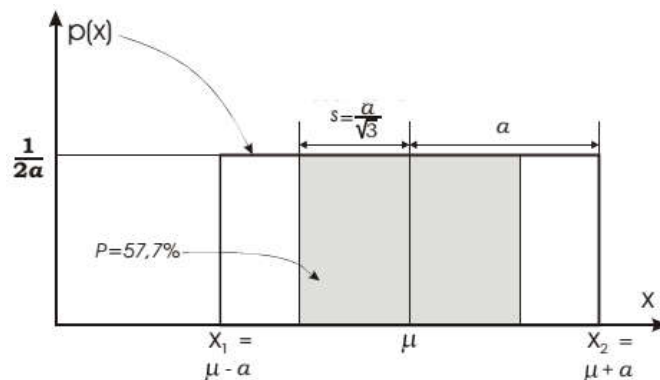
$$K = 100 \frac{\Delta_x}{M}$$

$$\Delta_x = \frac{MK}{100}$$

Merna nesigurnost tipa B

Analogni instrumenti – nesigurnost očitavanja

- Na osnovu podatka o klasi tačnosti, procenjuje se merena nesigurnost tipa B
- Ako specifikacijama proizvođača nije drugačije navedeno, i ako nema nikakvih dodatnih podataka, pretpostavlja se uniformna raspodela
- Merna nesigurnost se procenjuje kao standardna devijacija za uniformnu raspodelu



$$u_B = \sigma = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}} = \frac{K}{100\sqrt{3}} M$$

METRAmax[®]3

Analog Multimeter

3-349-117-03
4/4.10

- Direct and alternating voltage to 600 V
- Direct and alternating current to 15 A
- Resistance from 1 Ω to 300 k Ω
- 3 measuring ranges per measuring function
- Interrupted conductors are recognized by means of internal resistance of approximately 1 k Ω /V
- Excellent overload protection thanks to protective relay and PTC thermistors



Applications

The METRAmax[®]3 analog multimeter is a cost-effective, handy multimeter without amplifier, and includes an integrated circuit breaker which protects the current measuring ranges. The instrument is also equipped with ample overload protection in the voltage ranges thanks to generously dimensioned, high performance PTC thermistors.

The instrument is equipped with 15 measuring ranges for direct and alternating voltage, direct and alternating current, and resistance measurement. The deliberately low input resistance of approximately 1 k Ω /V generates sufficient load during measurements taken at voltage circuits to allow for the recognition of faulty cable routing in the event of capacitive interference.

The meter has been especially developed for use in training and the electrical trades. The often annoying task of replacing fuses is eliminated, instrument availability is increased and operating costs are reduced in a lasting fashion with the METRAmax[®]3.

Characteristic Values

Alternating and Direct Voltage Measuring Ranges

Measured Quantity	Measuring Range	Internal Resistance		Accuracy Class
		-	-	
U~ / U=	600 V	780 k Ω	600 k Ω	2.5%
	300 V	380 k Ω	300 k Ω	
	30 V	32 k Ω	30 k Ω	

Alternating and Direct Current Measuring Ranges

Measured Quantity	Measuring Range	Voltage Drop		Accuracy Class
		-	-	
I~ / I=	15 A ¹⁾	915 mV	900 mV	2.5%
	3 A	320 mV	340 mV	
	300 mA	140 mV	200 mV	

Merna nesigurnost tipa B

ANALOGNI POKAZNI INSTRUMENT (nesigurnost čitanja)

Primer:

Odrediti proširenu mernu nesigurnost voltmetra sa pokretnim gvoždem. Pri ovom smatrati da je klasa tačnosti $K=0.5$, maksimalno pokazivanje instrumenta (opseg merenja) $M=130$ V, i da je faktor proširenja $k=1.73$. Pri merenju pokazana vrednost napona je bila 71.1 V.

S obzirom da na merenje mogu da utiču temperatura, magnetsko polje, i druge pojave, važno je da se obezbedi da pri merenju sve te "smetnje" budu u propisanim granicama.

Merna nesigurnost tipa B

ANALOGNI POKAZNI INSTRUMENT (nesigurnost čitanja)

Rešenje:

Procenićemo prvo standardnu nesigurnost tipa B:

$$u_B = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}} = \frac{K/100}{\sqrt{3}} M = \frac{0.5/100}{\sqrt{3}} 130 = 0.375 \text{ V}$$

S obzirom da se radi o merenju napona, merna nesigurnost je u Voltima. Koristeći zadati faktor proširenja $k=1.73$ dobijamo da je

$$U_x = 71.1 \pm 0.65 \text{ V}$$

Ova merna nesigurnost se može prikazati i kao relativna vrednost. Merna nesigurnost se dobija deljenjem merne nesigurnosti i merenog napona, pa dobijamo da je ona 0.9%.

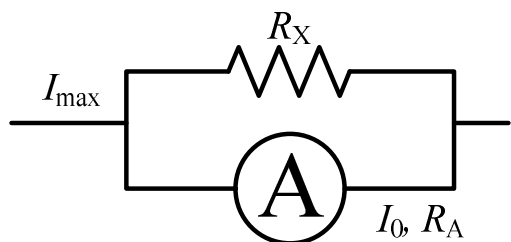
Merna nesigurnost tipa B – lab. vežba

- a) Dat je ampermetar sa pokretnim kalemom koji može da meri maksimalnu jednosmernu struju $I_0=1$ mA i ima unutrašnju otpornost $R_A=207 \Omega$. Pomoću datog ampermetra i potrebnog broja otpornika realizovati ampermetar čiji je merni opseg $I_{\max}=10$ mA. Izračunati vrednosti upotrebljenih otpornika.
- b) Pokazivanje realizovanog ampermetra iz tačke a) je ispitano pomoću preciznog etalonskog ampermetra, a izmerene vrednosti su prikazane u tabeli. Za očitavanje vrednosti realizovanog ampermetra je iskorišćena skala ampermetra sa pokretnim kalemom pomnožena faktorom 10. Odrediti klasu tačnosti realizovanog ampermetra. Odrediti mernu nesigurnost tipa B realizovanog ampermetra na osnovu rezultata merenja iz tabele.

$I_{\text{realizovani}}_{\text{A}} [\text{mA}]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{I}_{\text{etalonski}}_{\text{A}} [\text{mA}]$	1.2	2.11	3.12	3.9	5.2	5.92	7.1	8.1	8.9	9.8

Merna nesigurnost tipa B

Rešenje:



$$R_X = \frac{I_0 R_A}{I_{\max} - I_0} = 23 \Omega$$

$$\Delta I_{\max} = 0.2 \text{ mA}$$

$$K = \frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}} \cdot 100 = 2$$

$$u_B = \frac{\Delta I_{\max}}{\sqrt{3}} = 0.12 \text{ mA}$$

Odredi se
klasa tačnosti

Merna nesigurnost tipa B

Digitalni instrumenti

- Nije do kraja standardizovan način na koji proizvođači navode podatke o greški
- Osnovni podatak koji se definiše je rezolucija koja je određena brojem cifara
- Na primer, broj cifara $3\frac{1}{2}$ znači da instrument ima 3 cifre na kojima može da se ispiše bilo koji broj od 0 do 9 i cifru najveće težine na kojoj može da piše 0 ili 1

Merna nesigurnost tipa B

Digitalni instrumenti

- Za instrument s brojem cifara $3\frac{1}{2}$ na opsegu od 2V maksimalna vrednost koja može da se prikaže je 1.999, **rezolucija** se određuje kao $2V/2000$ tj. **opseg podeljen s brojem stanja** koje mogu da se prikažu na tom opsegu

Merna nesigurnost tipa B

Digitalni instrumenti – nesigurnost očitavanja

- Najčešće se greška definiše kao procentualna greška u odnosu na očitanu vrednost plus procentualna greška opsega na kom se meri

$$\Delta_x = \frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M$$

Opseg

$$\Delta_x = \frac{\delta_1}{100} X + NR$$

Pokazivanje instrumenta

Rezolucija

Broj cifara najmanje težine ("digit" "count") za procenu greške opsega



Model 2015/2015P THD Multimeter



TRUE RMS AC VOLTAGE AND CURRENT CHARACTERISTICS

ACCURACY¹ ±(% of reading + % of range), 23 °C ±5 °C

VOLTAGE RANGE	RESOLUTION	CALIBRATION CYCLE	3 Hz–10 Hz ¹⁰	10 Hz–20 kHz	20 kHz–50 kHz	50 kHz–100 kHz	100 kHz–300 kHz
100.0000 mV	0.1 µV						
1.000000 V	1.0 µV	90 Days	0.35 + 0.03	0.05 + 0.03	0.11 + 0.05	0.60 + 0.08	4 + 0.5
10.00000 V	10 µV						
100.0000 V	100 µV	1 Year	0.35 + 0.03	0.06 + 0.03	0.12 + 0.05	0.60 + 0.08	4 + 0.5
750.000 V	1 mV						

TEMPERATURE COEFFICIENT/°C^a

0.035 + 0.003	0.005 + 0.003	0.006 + 0.005	0.01 + 0.006	0.03 + 0.01
---------------	---------------	---------------	--------------	-------------

CURRENT RANGE	RESOLUTION	CALIBRATION CYCLE	3 Hz–10 Hz	10 Hz–3 kHz	3 kHz–5 kHz
1.000000 A	1 µA	90 Day/1 Year	0.30 + 0.04	0.10 + 0.04	0.14 + 0.04
3.00000 A	10 µA	90 Day/1 Year	0.35 + 0.06	0.15 + 0.06	0.18 + 0.06

TEMPERATURE COEFFICIENT/°C^a

0.035 + 0.006	0.015 + 0.006	0.015 + 0.006
---------------	---------------	---------------

HIGH CREST FACTOR ADDITIONAL ERROR ±(% of reading)⁷

CREST FACTOR:	1–2	2–3	3–4	4–5
ADDITIONAL ERROR:	0.05	0.15	0.30	0.40

AC OPERATING CHARACTERISTICS²

FUNCTION	DIGITS	READINGS/s	RATE	BANDWIDTH
ACV (all ranges), and ACI (all ranges)	6½ ³	2s/reading	SLOW	3 Hz–300 kHz
	6½ ³	1.4	MED	30 Hz–300 kHz
	6½ ⁴	4.8	MED	30 Hz–300 kHz
	6½ ³	2.2	FAST	300 Hz–300 kHz
	6½ ⁴	35	FAST	300 Hz–300 kHz

ADDITIONAL LOW FREQUENCY ERRORS ±(% of reading)

	SLOW	MED	FAST
20Hz–30Hz	0	0.3	—
30Hz–50Hz	0	0	—
50Hz–100Hz	0	0	1.0
100Hz–200Hz	0	0	0.18
200Hz–300Hz	0	0	0.10
>300Hz	0	0	0

AC SYSTEM SPEEDS^{2,5}

FUNCTION/RANGE CHANGE⁴: 4 / s.
 AUTORANGE TIME: <3 s.
 ASCII READINGS TO RS-232 (19.2K BAUD)⁴: 50 / s.
 MAX. INTERNAL TRIGGER RATE⁴: 300 / s.
 MAX. EXTERNAL TRIGGER RATE⁴: 260 / s.

AC GENERAL

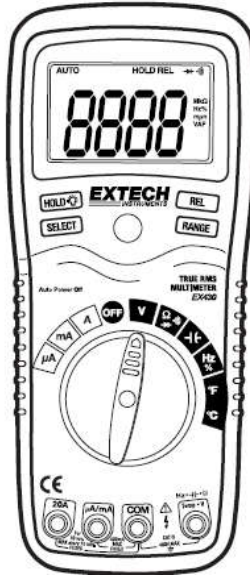
INPUT IMPEDANCE: 1MΩ ±2% paralleled by <100pF.
 ACV INPUT PROTECTION: 1000Vp.
 MAXIMUM DCV: 400V on any ACV range.
 ACI INPUT PROTECTION: 3A, 250V fuse.
 BURDEN VOLTAGE: 1A Range: <0.3V rms. 3A Range: <1V rms.
 SHUNT RESISTOR: 0.1Ω on all ACI ranges.
 AC CMRR: >70dB with 1kΩ in LO lead.
 MAXIMUM CREST FACTOR: 5 at full scale.
 VOLT HERTZ PRODUCT: ≤8 × 10⁶ V·Hz.
 OVERRANGE: 120% of range except on 750V and 3A ranges.

AC Notes

- Specifications are for SLOW rate and sinewave inputs >5% of range.
- Speeds are for 60 Hz operation using factory default operating conditions: Auto range off, Display off, includes measurement and binary data transfer

True RMS Multimeter

Extech 430



Specifications

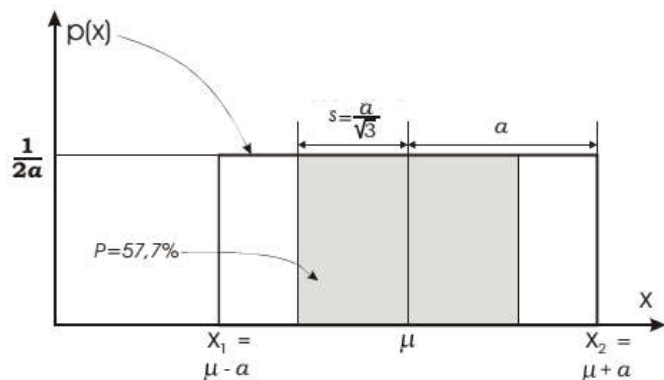
Function	Range	Resolution	Accuracy	
DC Voltage	400mV	0.1mV	±(0.3% reading + 2 digits)	
	4V	0.001V	±(0.5% reading + 2 digits)	
	40V	0.01V		
	400V	0.1V		
	1000V	1V	±(0.8% reading + 3 digits)	
AC Voltage			50 to 400Hz	400Hz to 1kHz
	400mV	0.1mV	±(1.5% reading + 15 digits)	±(2.5% reading + 15 digits)
	4V	0.001V	±(1.5% reading + 6 digits)	±(2.5% reading + 8 digits)
	40V	0.01V		
	400V	0.1V	±(1.8% reading + 6 digits)	±(3% reading + 8 digits)
750V	1V			
DC Current	400μA	0.1μA	±(1.5% reading + 3 digits)	
	4000μA	1μA		
	40mA	0.01mA		
	400mA	0.1mA	±(2.5% reading + 5 digits)	
	4A	0.001A		
	20A	0.01A		
AC Current			50 to 400Hz	400Hz to 1KHz
	400μA	0.1μA	±(1.8% reading + 8 digits)	±(3.0% reading + 7 digits)
	4000μA	1μA		
	40mA	0.01mA	±(3.0% reading + 8 digits)	±(3.5% reading + 10 digits)
	400mA	0.1mA		
	4A	0.001A		
20A	0.01A			
Resistance	400Ω	0.1Ω	±(0.8% reading + 4 digits)	
	4kΩ	0.001kΩ	±(0.8% reading + 2 digits)	
	40kΩ	0.01kΩ	±(1.0% reading + 2 digits)	
	400kΩ	0.1kΩ		
	4MΩ	0.001MΩ	±(3.0% reading + 5 digits)	
	40MΩ	0.01MΩ		
Capacitance	40nF	0.01nF	±(5.0% reading + 7 digits)	
	400nF	0.1nF	±(3.0% reading + 5 digits)	
	4μF	0.001μF	±(3.5% reading + 5 digits)	
	40μF	0.01μF		
	100μF	0.1μF	±(5.0% reading + 5 digits)	

NOTE: Accuracy is stated at 18°C to 28°C (65°F to 83°F) and less than 75% RH.

Merna nesigurnost tipa B

Digitalni instrumenti – nesigurnost očitavanja

- I u slučaju digitalnih instrumenata, ako nije drugačije navedeno, pretpostavlja se da je raspodela greške uniformna pa se nesigurnost računa kao



$$u_B = \sigma = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Merna nesigurnost tipa B

DIGITALNI POKAZNI INSTRUMENT (nesigurnost čitanja)

Primer: Odrediti proširenu mernu nesigurnost digitalnog ampermetra. Pri ovom koristiti podatke proizvođača (opseg merenja $M=200$ mA, relativne greške: $\pm 0.1\%$ od čitanja, $\pm 0.05\%$ od opsega). Pri ponavljanju merenja dobijen je rezultat $I_x=60$ mA. Procenićemo standardnu nesigurnost tipa B:

Rešenje:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0.1}{100} 60 + \frac{0.05}{100} 200}{\sqrt{3}} = 0.09 \text{ mA}$$

Za faktor proširenja $k=1.73$: $I_x=60.0 \pm 0.16$ mA, $k=1.73$

Ako mernu nesigurnost izrazimo kao relativnu veličinu dobijamo da je nesigurnost merenja struje od 60 mA 0.25%.

Merna nesigurnost tipa B

DIGITALNI POKAZNI INSTRUMENT (nesigurnost čitanja)

Primer: Odrediti mernu nesigurnost tipa B ako je opseg instrumenta $M=200$ mA, greška očitavanja je $\pm 0.1\%$ od broja, a ekran ima $3\frac{1}{2}$ cifre. Broj kvantizacionih nivoa greške (digits) je $N=2$. Pri merenju pokazivanje je $I_x=60$ mA.

Rešenje:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + NR}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0.1}{100} 60 + \frac{2}{2000} 200}{\sqrt{3}} = 0.15 \text{ mA}$$

$$I_x = 60.00 \pm 0.26 \text{ mA}, k = 1.73$$

U ovom slučaju dobijamo da relativna nesigurnost pri merenju struje od 60 mA iznosi $\pm 0.43\%$.

Kombinovana merna nesigurnost

Primer:

Odrediti mernu nesigurnost ako su u toku ponavljanja merenja napona dobijeni sledeći naponi:

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U[V]	5.0009	5.0019	4.9992	4.9998	5.0011	4.9989	5.0007	5.0003	4.9995	5.0014

Opseg mernog instrumenta je $M=10$ V, tačnost očitavanja je $\pm 0.01\%$, a tačnost opsega je $\pm 0.005\%$.

Rešenje:

Procenjena tačna vrednost merenja je:

$$U_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i = 5.00037 \cong 5.0004 \text{ V}$$

Kombinovana merna nesigurnost

Rešenje (nastavak):

Procenjena merna nesigurnost tipa A je:

$$u_{A,U_X} = \hat{\sigma}(\bar{X}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (U_{Xi} - \bar{U}_x)^2} = 0.00032 \text{ V}$$

Procenjena merna nesigurnost tipa B je:

$$u_{B,U_X} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0.01}{100} 5.0004 + \frac{0.005}{100} 10}{\sqrt{3}} = \frac{0.0005 + 0.0005}{\sqrt{3}} = 0.00058 \text{ V}$$

Kombinovana nesigurnost je:

$$u_{C,U_X} = \sqrt{u_{A,U_X}^2 + u_{B,U_X}^2} = \sqrt{0.00032^2 + 0.00058^2} = 0.00066 \text{ V}$$

Kombinovana merna nesigurnost

Rešenje (nastavak):

Ako se ovaj rezultat proširi ($k=2$) dobijamo proširenu nesigurnost

$$U_X = 5.0004 \pm 0.0013 \text{ V}; k = 2$$

Konačno, možemo napisati i da je izmereni napon $U_X = 5.000037 \text{ V}$ sa nesigurnošću od 0.026%, i faktorom proširenja $k=2$.

Kombinovana merna nesigurnost

Primer: Procena merne nesigurnosti otpora koristeći voltmetar i ampermetar. Digitalni voltmetar može da meri u opsegu od 200 mV, $\pm 0.1\%$ je tačnost očitavanja, a $\pm 0.05\%$ tačnost opsega. U toku merenja napon je $U_x = 150$ mV. Analogni ampermetar može da meri u opsegu do 1.2 A, klasa tačnosti je $K=0.5$, i struja u toku merenja je $I_x = 0.4$ A.

Rešenje:

S obzirom na podatke je merna nesigurnost voltmetra određena jednačinom:

$$u_U = \frac{\frac{0.1}{100} 150 + \frac{0.05}{100} 200}{\sqrt{3}} = 0.14 \text{ mV ili } 0.1\%$$

Merna nesigurnost ampermetra je:

$$u_i = \frac{\frac{0.5}{100} \times 1.2}{\sqrt{3}} = 0.0034 \text{ A ili } 0.87\%$$

Kombinovana merna nesigurnost

Rešenje (nastavak):

Standardna nesigurnost merenja otpornosti V-A metodom je:

$$u_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial(U/I)}{\partial U} u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial(U/I)}{\partial I} u_I\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} u_U\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} u_i\right)^2} = 3.2 \text{ m}\Omega \text{ ili } 0.88\%$$

Ako uvedemo i proširenu nesigurnost sa koeficijentom proširenja $k=2$ dobijamo da je veličina od interesa:

$R_x = U/I = 375 \pm 6.4 \text{ m}\Omega$; $k=2$, ili $R_x = 375 \text{ m}\Omega$ sa tačnošću od 1.7% i faktorom proširenja $k=2$.

Kombinovana merna nesigurnost

Primer:

Odrediti mernu nesigurnost merjenja snage trofazne mreže:

$$P_x = P_1 + P_2 + P_3.$$

Vatmetar koji se koristi za merenje ima opseg od 2400 W, klasa tačnosti je 0.5, a snage koje se mere su $P_1 = 1600$ W, $P_2 = 1200$ W, i $P_3 = 2000$ W.

Rešenje:

Prvo ćemo odrediti standardi nesigurnost instrumenta:

$$u_{P_1} = u_{P_2} = u_{P_3} = \frac{0.5 \times 2400}{100\sqrt{3}} = 6.9 \text{ W}$$

Kombinovana merna nesigurnost

Rešenje (nastavak):

Standardna nesigurnost snage je ako koristimo tri vatmetra:

$$u_{P_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial(P_1 + P_2 + P_3)}{\partial P_1} u_{P_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial(P_1 + P_2 + P_3)}{\partial P_2} u_{P_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial(P_1 + P_2 + P_3)}{\partial P_3} u_{P_3}\right)^2} = 12 \text{ W}$$

Uzimajući i faktor proširenja 2 dobijamo da je

$$P_x = P_1 + P_2 + P_3 = 4800 \text{ W} \pm 24 \text{ W, ili}$$

ako se koristi relativna nesigurnost

$$P_x = 4800 \text{ W sa nesigurnošću od 0.5\%.$$

Merna nesigurnost tipa B

- Napon se meri digitalnim voltmetrom na opsezima od 2 V i od 20 V. Pri prvom merenju, na opsegu od 2 V pokazivanje voltmetra je 1.752 V a pri drugom merenju, na opsegu od 20 V pokazivanje je 1.76 V.
- Proceniti mernu nesigurnost tipa B.
- Ako merna nesigurnost tipa A može da se zanemari, odrediti rezultat merenja.

Opseg	Greška očitavanja [%]	Greška opsega [%]
2 V	0.05	0.2
20 V	0.05	0.15

Merna nesigurnost tipa B

$$u_B = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\delta_1}{100} U_{PI} + \frac{\delta_2}{100} U_{op} \right)$$

opseg $U_{op}=2$ V, $U_{PI}=1.752$ V

$u_B=0.0028$ V

$u_{Br}=0.16\%$, faktor proširenja $k=1$

opseg $U_{op}=20$ V, $U_{PI}=1.76$ V

$u_B=0.018$ V

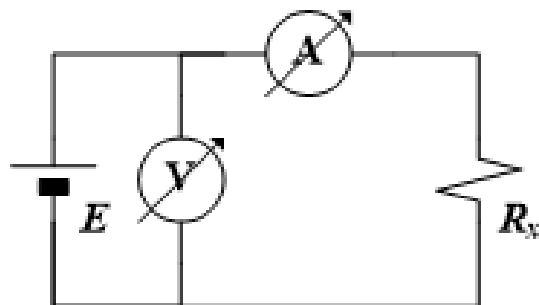
$u_{Br}=1.0\%$, faktor proširenja $k=1$

opseg $U_{op}=2$ V, $U=(1.752\pm 0.003)$ V, faktor proširenja $k=1$

opseg $U_{op}=20$ V, $U=(1.76\pm 0.02)$ V, faktor proširenja $k=1$

Januar 2017

3. Na Sl. 3 je prikazana šema za merenje otpornosti R_x pomoću strujne veze. Za merenje napona U se koristi digitalni voltmeter („*autorange*“), a za merenje struje I se koristi analogni ampermetar. Karakteristike instrumenata su prikazane u Tabeli 3. Ostale karakteristike mernih instrumenata smatrati idealnim. Voltmeter pokazuje $U=5$ V. Ampermetar pokazuje $I=45$ mA pri čemu je kazaljka ampermetra u poslednjoj trećini skale. Odrediti rezultat merenja, pod pretpostavkom da se otpornost ampermetra ne može zanemariti. Smatrati da se merna nesigurnost tipa A može zanemariti.

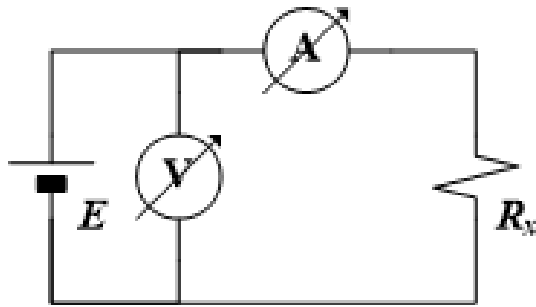


Sl. 3.

Tabela 3.

Digitalni voltmeter („ <i>autorange</i> “)		
opseg	tačnost $\pm(\% \text{ očitavanja} + \text{“digits”})$	rezolucija
600.0 mV	$\pm(0.3 \% + 2)$	0.1 mV
6.000 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	0.001 V
60.00 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	0.01 V
600.0 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	0.1 V
1000 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	1 V

Analogni ampermetar		
opseg	otpornost [Ω]	klasa tačnosti
60 mA	48	0.5
120 mA	12	
300 mA	2	
600 mA	0.5	



Sl. 3.

$$R_x = \frac{U}{I} - R_A = f(U, I)$$

Direktno ili indirektno merenje? Indirektno.

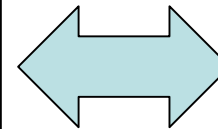
Opšti oblik za mernu nesigurnost pri indirektnom merenju:

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)$$

$$r(x_i, x_j) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$$

$$r(x_i, x_j) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2}}$$



$$x_i = U$$

$$x_j = I$$

$$r = 0$$

$$u_c = \sqrt{\left(\left| \frac{\partial f}{\partial U} \right| u_U \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial f}{\partial I} \right| u_I \right)^2} = \sqrt{\left(\left| \frac{1}{I} \right| u_U \right)^2 + \left(\left| -\frac{U}{I^2} \right| u_I \right)^2}$$

Voltmeter pokazuje $U=5$ V. Voltmeter je „*autorange*“.

Ampermetar pokazuje $I=45$ mA pri čemu je kazaljka ampermetra u poslednjoj trećini skale.

Digitalni voltmeter („ <i>autorange</i> “)		
opseg	tačnost $\pm(\% \text{ očitavanja} + \text{“digits”})$	rezolucija
600.0 mV	$\pm(0.3 \% + 2)$	0.1 mV
6.000 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	0.001 V
60.00 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	0.01 V
600.0 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	0.1 V
1000 V	$\pm(0.1 \% + 2)$	1 V

Analogni ampermetar		
opseg	otpornost [Ω]	klasa tačnosti
60 mA	48	0.5
120 mA	12	
300 mA	2	
600 mA	0.5	

$$u_U = \sqrt{u_{UA}^2 + u_{UB}^2} \approx u_{UB} = \frac{\delta_1 U_x + NR}{\sqrt{3}} = \frac{0.1}{100} 5 + \frac{2 \cdot 0.001}{\sqrt{3}} = 4.04 \text{ mV}$$

$$u_{I_x} = \sqrt{u_{I_xA}^2 + u_{I_xB}^2} \approx u_{I_xB} = \frac{\frac{K}{100} M_A}{\sqrt{3}} = \frac{0.5}{100} 60 \text{ mA} = 0.173 \text{ mA}$$

$$u_c = 0.44 \Omega$$

$$R_x = \frac{U}{I} - R_A = 63.1 \Omega$$

$$R_x = (63.1 \pm 0.9) \Omega, \quad k = 2$$

Smatrati da se merna nesigurnost tipa A može zanemariti.

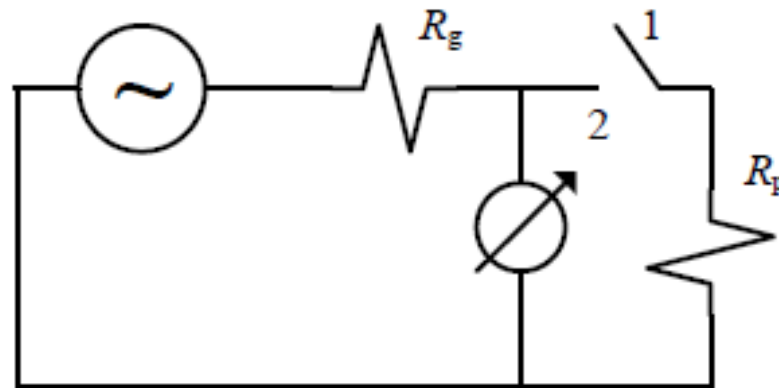
Ako u zadatku nije drugačije navedeno, smatrati da je $k=2$ (Gausova raspodela, $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 95\%$).

Jul 2017

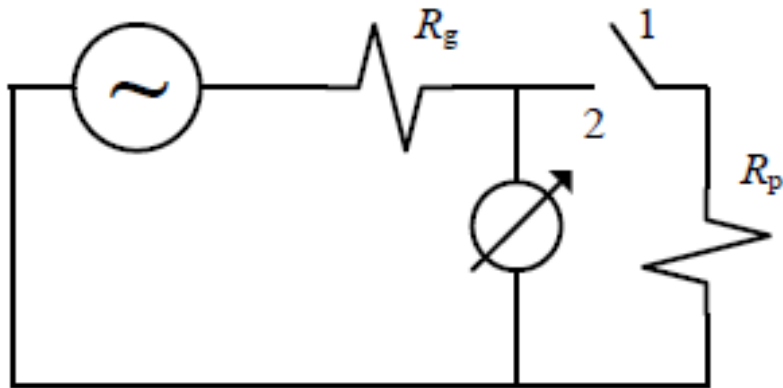
Na Sl. 3. je prikazano kolo za merenje izlazne otpornosti generatora R_g . Kada je prekidač u položaju 1 volmetar pokazuje vrednost U_1 , a kada je prekidač u položaju 2 volmetar pokazuje vrednost U_2 . Analogni voltmetar ima merni opseg $U_{max}=10$ V i klasu tačnosti $K=1$. Pokazivanje digitalnog multimetra (merni opseg $R_{max}=1$ k Ω , nesigurnost očitavanja ± 0.1 %, nesigurnost opsega ± 0.05 %) pri merenju otpornosti R_p je 100Ω .

a) Izvesti izraz za otpornost R_g ako su poznata očitavanja na voltmtru U_1 i U_2 .

b) Odrediti mernu nesigurnost pri merenju izlazne otpornosti generatora R_g ako su $U_1=8$ V i $U_2=4$ V.



Sl. 3.



Sl. 3.

$$U_1 = E$$

$$U_2 = E \frac{R_p}{R_p + R_g}$$

$$R_g = R_p \frac{U_1 - U_2}{U_2}$$

$$u_{U_1} = u_{U_2} = \sqrt{u_{U_{1A}}^2 + u_{U_{1B}}^2} \approx u_{U_{1B}} = \frac{\frac{K}{100} U_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{100} 10 \cdot 0.058 V$$

$$u_{R_p} = \frac{\frac{0.1}{100} 100 + \frac{0.05}{100} 1000}{\sqrt{3}} = 0.35 \Omega$$

$$u_{R_v} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_g}{\partial R_p} u_{R_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_g}{\partial U_1} u_{U_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_g}{\partial U_2} u_{U_2} \right)^2} = 3.26 \Omega$$

$$R_g = (100 \pm 6.52) \Omega, \quad \text{za } k = 2$$

Varijacije na temu:

Različite šeme sa predavanja i vežbi
(nekad ih treba i predložiti!)

Ako je dostupan niz merenja pomoću
instrumenta moguće je proceniti i mernu
nesigurnost tipa A.