

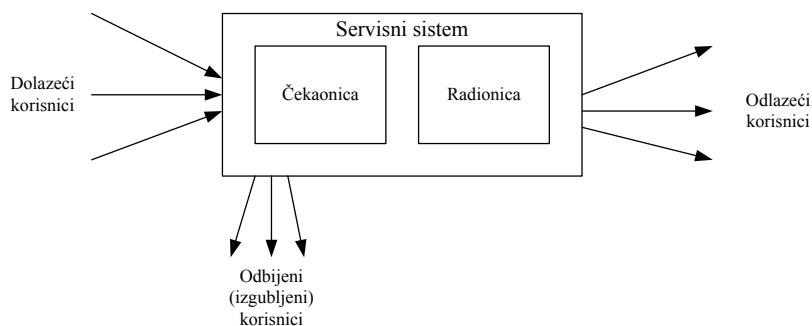
**KOMUTACIONI SISTEMI**  
**– Prilog A –**

## Prilog A

U okviru ovog priloga će biti izloženi osnovni principi i modeli teorije servisnih sistema (engl. *queueing theory*).

### A.1. Uvod u teoriju servisnih sistema

Ova teorija je široko primenjivana u oblasti telekomunikacija. Ona se zasniva na predstavljanju jednog telekomunikacionog sistema ili njegovog dela kao servisnog sistema čija je uloga da obradi odgovarajuće poslove koje korisnici zahtevaju od njega. Opšti model servisnog sistema je prikazan na slici A.1.1.



Slika A.1.1. Opšti model servisnog sistema

Osnovni elementi servisnog sistema su:

- **Dolazeći korisnici** – oni predstavljaju ulaz u servisni sistem. Korisnici dolaze u servisni sistem sa ciljem da im servisni sistem pruži odgovarajuću uslugu. Primeri korisnika su: telefonski pretplatnici u telefonskim mrežama koji zahtevaju uslugu telefonskog razgovora od telefonske mreže, paketi koji dolaze u komunikacioni čvor i zahtevaju da ih taj komunikacioni čvor prosledi do korisnika ili nekog drugog komunikacionog čvora, itd. Korisnici se karakterišu sa količinom posla koju nose (npr. telefonski razgovor može biti kraći ili duži i time su resursi telefonske mreže kraće ili duže zauzeti; što je duži paket koji pristigne u komunikacioni čvor biće potrebno veće vreme da se on prosledi dalje do sledećeg komunikacionog čvora ili korisnika). Takođe se definiše i proces dolazaka u servisni sistem koji predstavlja raspodelu dolazaka korisnika u servisni sistem. Najčešće se koristi Poissonov proces dolazaka korisnika.
- **Odbijeni (izgubljeni korisnici)** – to su korisnici koji su odbijeni od strane servisnog sistema i kojima usluga nije pružena. Najčešći razlog je zauzeće svih resursa servisnog sistema, ali postoje i drugi kao npr. niži prioritet od nekih prioritetnijih korisnika koji dovode do odbijanja posluživanja korisnika nižeg prioriteta u slučaju kada je servisni sistem preopterećen i sl. Odbijeni korisnici zato moraju ili ponovo pokušati (ponovo kao dolazeći korisnici) da dobiju uslugu od servisnog sistema ili odustati od tražene usluge. (Na primer, ako nam telefonski poziv bude odbijen usled zauzeća svih resursa telefonske centrale, možemo ili pokušati ponovo u nadi da su se resursi u međuvremenu oslobodili ili odustati od željenog poziva).

- **Odlazeći korisnici** – korisnici koji su posluženi od strane servisnog sistema i napuštaju ga oslobađajući pri tome resurse servisnog sistema koje su zauzimali.
- **Čekaonica** – deo servisnog sistema u kom korisnici prihvaćeni od strane servisnog sistema čekaju da budu posluženi. Čekaonica nije obavezan element servisnog sistema tj. može i da izostane, a ako postoji u realnosti je konačnog kapaciteta iako se u teoriji koriste i modeli koji razmatraju čekaonicu beskonačnog kapaciteta. Kapacitet čekaonice po definiciji predstavlja maksimalan moguć broj korisnika u čekaonici.
- **Radionica** – u radionici se nalaze serviseri (kojih ima 1 ili više) koji obrađuju poslove koje im donose korisnici. Kapacitet radionice je broj servisera u radionici. Ukupan zbir kapaciteta čekaonice i radionice daje kapacitet servisnog sistema koji predstavlja maksimalni broj korisnika koje servisni sistem može da prihvati. Za servisere se uglavnom smatra da su podjednake kvaliteta i da rade bez pauze tj. kad god je neki serviser slobodan, a ima posla koji treba da se odradi on ga odmah preuzima na obradu. Ali, postoje i modeli koji sadrže servisere koji se povremeno odmaraju. U okviru radionice se definiše i pojam disciplina posluživanja koja definiše redosled kojim će se korisnici, koji čekaju u čekaonici, posluživati. Primeri discipline posluživanja su: LCFS (*Last Come First Served*) – poslužuje se korisnik koji je poslednji došao u servisni sistem, FCFS (*First Come First Served*) – poslužuje se korisnik koji je prvi došao u servisni sistem, sa prioriteto – poslužuje se korisnik najvišeg prioriteta, itd. Takođe se definiše i proces obrade korisnika koja predstavlja raspodelu vremena obrade korisnika.

Kendall je 1951. g. uveo sistem označavanja servisnih sistema koji izgleda i funkcioniše na sledeći način: **A/B/m/k/I/Z** gde su definicije oznaka sledeće:

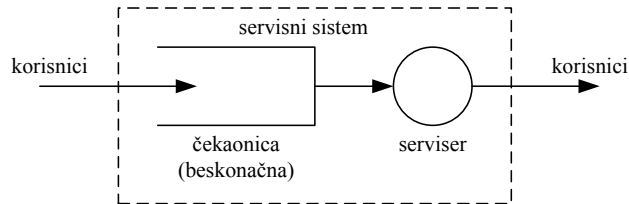
- **A** – proces toka dolazaka korisnika (vrednost **M** označava Markovljev proces dolazaka)
- **B** – proces obrade (vremena posluživanja) korisnika (vrednost **M** označava proces po eksponencijalnoj raspodeli)
- **m** – broj servisera u radionici
- **k** – ukupan kapacitet servisnog sistema
- **I** – broj korisnika koji dolaze u servisni sistem (koliki je ukupan broj potencijalnih korisnika servisnog sistema, npr. broj telefonskih pretplatnika jedne telefonske centrale)
- **Z** – disciplina čekanja u čekaonici

Ukoliko je **k** ili **I** beskonačno onda se ove oznake izostavljaju u Kendallovoj notaciji, a takođe se i **Z** izostavlja ukoliko je disciplina posluživanja FCFS.

Primeri Kendallovih oznaka:

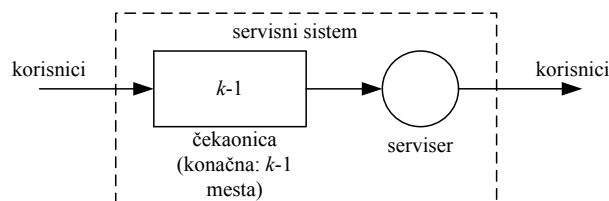
- **Sistem M/M/1** – Ovo je model servisnog sistema kod kojeg je tok dolazaka Poissonov, obrada korisnika ima eksponencijalnu raspodelu, postoji jedan serviser i čekaonica je beskonačnog kapaciteta (slika A.1.2).

- **Sistem M/M/1/k** – Sve isto kao u slučaju M/M/1 sistema, samo sa razlikom da je čekaonica konačna i kapaciteta  $k-1$  (slika A.1.3).
- **Sistem M/M/m** – Sve isto kao kod M/M/1 sistema, samo sa razlikom da postoji  $m$  servisera (slika A.1.4).



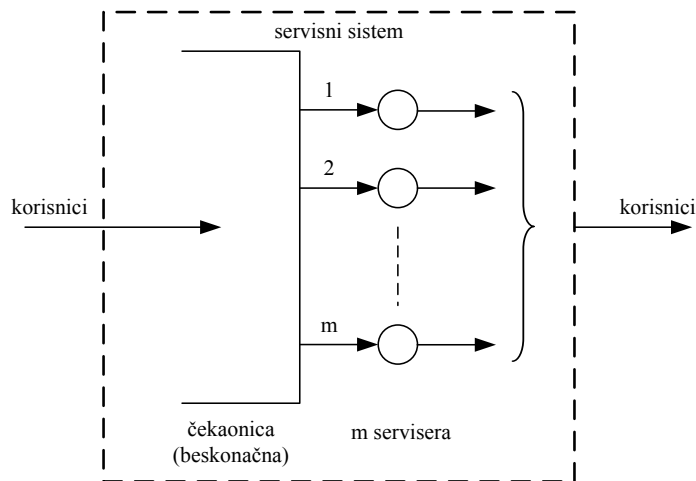
**M/M/1 sistem**

**Slika A.1.2. M/M/1 sistem**



**M/M/1/k sistem**

**Slika A.1.3. M/M/1/k sistem**



**M/M/m sistem**

**Slika A.1.4. M/M/m sistem**

## A.2. Proces dolazaka korisnika u servisni sistem

### A.2.1. Aspekti posmatranja procesa dolazaka

Proces dolazaka korisnika predstavlja vremensku raspodelu dolazaka korisnika u servisni sistem. Postoje tri aspekta posmatranja tokova dolazaka:

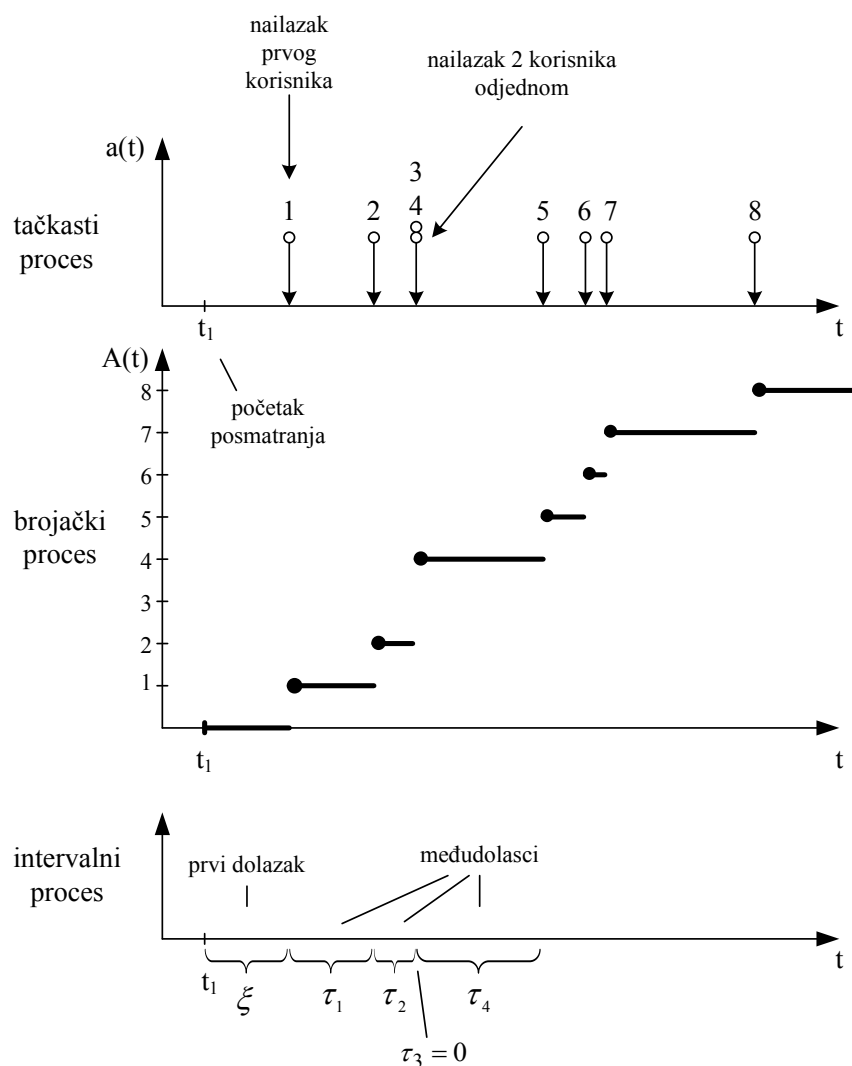
- Tačkasti proces
- Brojački proces
- Intervalni proces

U slučaju tačkastog procesa se posmatraju vremenski trenuci dolazaka korisnika u servisni sistem. Primer ovog aspekta posmatranja je dat na slici A.2.1.1.

U slučaju brojačkog procesa se posmatra broj korisnika koji je ušao u servisni sistem tokom vremena. Primer ovog aspekta posmatranja je dat na slici A.2.1.1.

U slučaju intervalnog procesa se posmatraju vremena prvog dolaska i međudolazaka korisnika u servisni sistem. Vreme prvog dolaska je vreme koje je proteklo od početka posmatranja pa do dolaska prvog korisnika u servisni sistem, a vreme međudolaska je vreme koje je proteklo između dolaska dva uzastopna korisnika. Primer ovog aspekta posmatranja je dat na slici A.2.1.1.

Tačkasti i brojački proces su diskretni procesi, pa se opisuju diskretnom raspodelom verovatnoća tj. verovatnoćama diskretnih događaja, a intervalni proces je kontinualan proces pa se opisuje gustinom verovatnoće.



Slika A.2.1.1. Aspekti posmatranja procesa dolazaka

### A.2.2. Poissonov proces dolazaka

Poissonov proces dolazaka se može posmatrati diskretno kao brojački ili tačkasti proces. Uslov za Poissonov proces je da je verovatnoća  $P_r\{a(\Delta t) = n\}$  (verovatnoća da je u intervalu  $\Delta t$  došlo  $n$  korisnika):

$$P_r\{a(\Delta t) = n\} = \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), & n = 0 \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t), & n = 1 \\ o(\Delta t), & n > 1 \end{cases}, \quad (\text{A.2.2.1})$$

gde je  $\Delta t \rightarrow 0$  interval posmatranja, a  $o(\Delta t)$  beskonačno mala veličina višeg reda tj.  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ . Izraz (A.2.2.1) se u suštini tumači na sledeći način: moguća su samo dva događaja u jednoj tački (trenutku), korisnik došao ili korisnik nije došao. Verovatnoća da je u jednom trenutku došlo više od jednog korisnika je beskonačno mala veličina višeg reda. Za Poissonov proces se definiše verovatnoća  $P_n(t)$  (verovatnoća da je u intervalu  $t$  došlo  $n$  korisnika) sa:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.2.2.2})$$

Ako se  $e^{-\lambda t}$  razvije u red onda se (A.2.2.2) može pisati kao:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left( 1 - \lambda\Delta t + \frac{\lambda^2}{2!} (\Delta t)^2 - \frac{\lambda^3}{3!} (\Delta t)^3 + \dots \right) \quad (\text{A.2.2.3})$$

Izrazi (A.2.2.1) i (A.2.2.3) su međusobno saglasni, što se lako može proveriti računanjem izraza (A.2.2.3) za sve slučajeve parametra  $n$  iz izraza (A.2.2.1). Takođe, za Poissonov proces važi da su nepreklapajući intervali posmatranja nezavisni jedan od drugog.

Osobine Poissonovog procesa:

1) *Definicija:*

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.2.2.4})$$

2) *Zbir svih verovatnoća je 1:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \quad (\text{A.2.2.5})$$

3) *Srednja vrednost  $m_A(t)$ :*

$$m_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \lambda t \Rightarrow \lambda = \frac{m_A(t)}{t} \quad (\text{A.2.2.6})$$

Parametar  $\lambda$  označava protok dolazaka korisnika tj. prosečan broj korisnika u jedinici vremena.

4) Varijansa  $\sigma_A^2$ :

$$\sigma_A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m_A)^2 P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) - m_A^2 = \lambda t \quad (\text{A.2.2.7})$$

Parametar indeks disperzije se definiše kao količnik varijanse i srednje vrednosti slučajnog procesa. Na osnovu indeksa disperzije se slučajni procesi klasifikuju u tri grupe: gladak slučajan proces (indeks disperzije manji od 1), normalan slučajan proces (indeks disperzije je jednak 1) i hrapav slučajan proces (indeks disperzije veći od 1). Kod Poissonovog procesa je indeks disperzije jednak 1 što znači da on spada u grupu normalnih slučajnih procesa. Poissonov proces je dobar za opisivanje dolazaka korisnika u telefonskim mrežama, međutim, u paketskim mrežama procesi dolazaka su hrapavi (saobraćaj ima *bursty* prirodu) pa Poissonov proces tada ne predstavlja dobru aproksimaciju.

5) Generišuća funkcija  $P(z)$ :

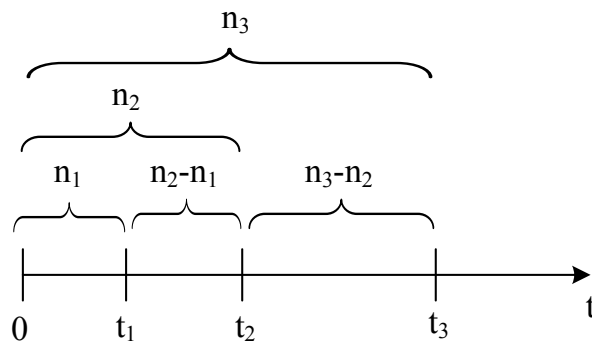
$$P(z) = E\{z^{A(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t) = e^{-\lambda t(1-z)} \quad (\text{A.2.2.8})$$

6) 'Gubitak memorije':

Posmatrajmo proizvoljna tri trenutka vremena  $t_1, t_2$  i  $t_3$ ,  $t_3 > t_2 > t_1$ . Neka je do trenutka  $t_i$  stiglo  $n_i$  korisnika tj.  $A(t_i) = n_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Nađimo uslovnu verovatnoću:  $P\{A(t_3) = n_3 / A(t_2) = n_2, A(t_1) = n_1\}$ .

$$\begin{aligned} P\{A(t_3) = n_3 / A(t_2) = n_2, A(t_1) = n_1\} &= P\{n_3 / n_2, n_1\} = \\ &= \frac{P\{n_1, n_2, n_3\} * P\{n_1\} P\{n_2 - n_1\} P\{n_3 - n_2\}}{P\{n_1, n_2\}} = \frac{P\{n_1\} P\{n_2 - n_1\} P\{n_3 - n_2\}}{P\{n_1\} P\{n_2 - n_1\}} = P\{n_3 - n_2\} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2.9})$$

\* Sa = je označena primena osobine nezavisnosti između nepreklapajućih intervala. Iz konačnog rezultata (A.2.2.9) vidimo da tražena uslovna verovatnoća zavisi samo od  $n_2$ , ali ne i od  $n_1$  tj. ranije predistorije i to se naziva osobinom 'gubitka memorije'. Ova osobina se još naziva i Markovljevo svojstvo pa se otuda Poissonov tok naziva i Markovljev proces dolazaka.



Slika A.2.2.1. - Osobina gubitka memorije

7) *Uniformnost uslovnog događaja:*

Neka je u servisni sistem došao 1 korisnik u intervalu  $(0, t)$ . Želimo da odredimo kolika je verovatnoća da se to desilo u intervalu  $(t_A, t_B)$   $t_A < t_B < t$ .

$$P(n_B - n_A = 1 / n = 1) = \frac{t_B - t_A}{t} \quad (\text{A.2.2.10})$$

Na osnovu (A.2.2.10) vidimo da su svi intervali iste dužine unutar intervala  $(0, t)$  podjednako verovatni i da je bitna samo veličina intervala, a ne i njegova pozicija. Ova osobina se lako dokazuje iz osobine Poissonove raspodele da su intervali koji se ne preklapaju međusobno nezavisni. Tada imamo izvođenje (A.2.2.11):

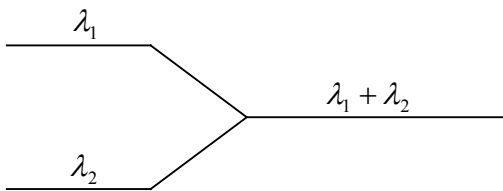
$$\begin{aligned} P\{n_B - n_A = 1 / n = 1\} &= \\ &= \frac{P\{A(t_A) = 0\}P\{A(t_B - t_A) = 1\}P\{A(t - t_B) = 0\}}{P\{A(t) = 1\}} = \\ &= \frac{\lambda(t_B - t_A)e^{-\lambda t_A} e^{-\lambda(t_B - t_A)} e^{-\lambda(t - t_B)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{t_B - t_A}{t} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2.11})$$

8) *Združivanje dva nezavisna Poissonova toka:*

Ako združimo dva međusobno nezavisna Poissonova toka sa parametrima  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  kao rezultat dobijamo opet Poissonov tok sa parametrom  $\lambda_1 + \lambda_2$ . To možemo lako da zaključimo na osnovu posmatranja generišućih funkcija ta dva međusobno nezavisna Poissonova toka koja združujemo. Generišuća funkcija rezultujućeg toka je proizvod generišućih funkcija tokova koje združujemo:

$$P(z) = P_1(z)P_2(z) = e^{\lambda_1(1-z)} e^{\lambda_2(1-z)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(1-z)} \quad (\text{A.2.2.12})$$

Na osnovu (A.2.2.12) lako zaključujemo da je rezultujući tok takođe Poissonov sa parametrom  $\lambda_1 + \lambda_2$ .



Slika A.2.2.2. Osobina združivanja dva nezavisna Poisson-ova toka

9) *Osobina razdvajanja Poissonovog toka:*

Neka je dat Poissonov tok sa parametrom  $\lambda$ . Neka se korisnici iz tog toka razdeljuju na  $k$  tokova pri čemu je verovatnoća da korisnik iz dolaznog toka završi u  $i$ -tom toku

$P_i$ . I neka je  $\sum_{i=1}^k P_i = 1$ . Tada je svaki od  $k$  tokova, dobijenih razdvajanjem od glavnog

toka, Poissonov tok sa parametrom  $\lambda_i = \lambda P_i$ ,  $i = 1..k$ . U bilo kom drugom načinu razdvajanja glavnog toka dobijeni tokovi neće više biti Poissonovi. Dokažimo za slučaj dva rezultujuća toka:



$$P\{A_1(t), A_2(t) / A(t)\} = P\{n_1, n_2 / (n_1 + n_2)\} = P\{n_1 + n_2\} P\{n_1, n_2\}$$

Poissonova raspodela (dolazni tok koji razdvajamo):

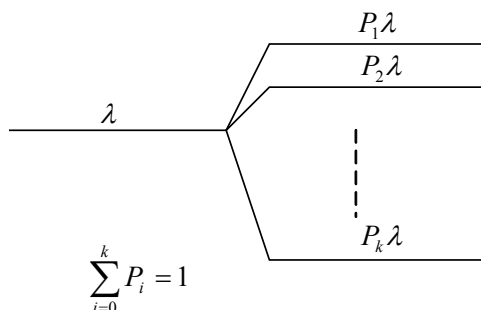
$$P\{n_1 + n_2\} = \frac{(\lambda t)^{n_1 + n_2}}{(n_1 + n_2)!} e^{-\lambda t}$$

Polinomijalna raspodela (parametar  $n = 2$ ):

(A.2.2.13)

$$P\{n_1, n_2\} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} P_1^{n_1} P_2^{n_2}$$

$$\Rightarrow P\{n_1 + n_2\} P\{n_1, n_2\} = \frac{(\lambda P_1 t)^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda P_1 t} \frac{(\lambda P_2 t)^{n_2}}{n_2!} e^{-\lambda P_2 t} = P\{n_1\} P\{n_2\}$$



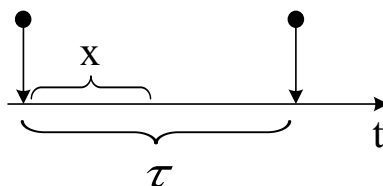
Slika A.2.2.3. Osobina razdruživanja Poissonovog toka

10) Verovatnoća prvog dolaska i verovatnoća međudolazaka:

Slučajna promenljiva koja označava trenutak dolaska prvog korisnika se obeležava sa  $\xi$ , a slučajna promenljiva koja označava vreme između dva uzastopna dolaska korisnika se obeležava sa  $\tau$ . Ove veličine mogu se videti i na slici A.2.1.1. Pošto su ovo kontinualne veličine onda se koristi gustina raspodele za obe slučajne promenljive. U slučaju Poissonovog toka dolazaka gustine raspodele za obe slučajne promenljive ( $w_\xi(t)$  i  $w_\tau(t)$ ) su identične eksponencijalne raspodele:

$$w_\xi(t) = w_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \quad (\text{A.2.2.14})$$

Ovo važi samo kod Poissonove raspodele tj. Poissonovog toka dolazaka, inače ova osobina ne važi tj. gustine raspodele  $w_\xi(t)$  i  $w_\tau(t)$  nisu iste u ostalim slučajevima. Dokaz da je gustina raspodele eksponencijalna raspodela se izvodi na sledeći način:



Slika A.2.2.4. - Dva uzastopna (susedna) dolaska

$$\begin{aligned}
P\{X < \tau\} &= P_0(t) = e^{-\lambda t} \\
\Rightarrow P\{\tau \leq X\} &= 1 - P\{X < \tau\} = 1 - e^{-\lambda t} \\
\Rightarrow w_\tau(t) &= \frac{d}{dt} P\{\tau \leq X\} = \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{A.2.2.15}$$

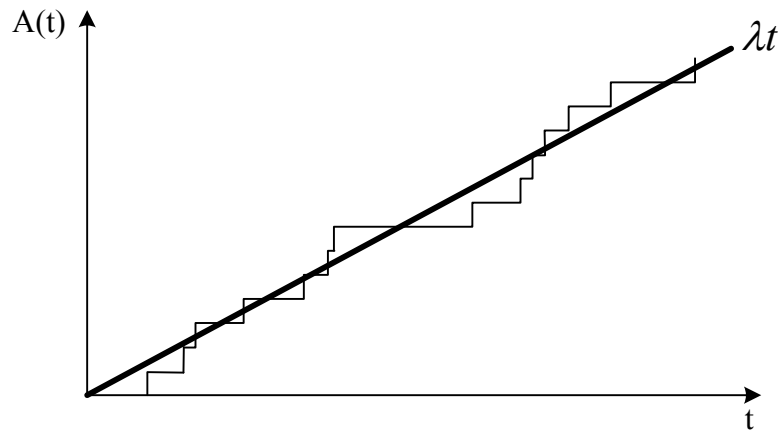
Uzeto je da u intervalu  $X$  nije došao nijedan korisnik i otuda  $P\{x < \tau\} = P_0(x)$ . Analogno je izvođenje i za slučaj gustine raspodele dolaska prvog korisnika.

#### 11) Osobina stacionarnosti Poissonovog toka

Brojački proces  $A(t)$  je stacionaran ako važi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = const$ . Pošto za Poissonov tok važi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda
\tag{A.2.2.16}$$

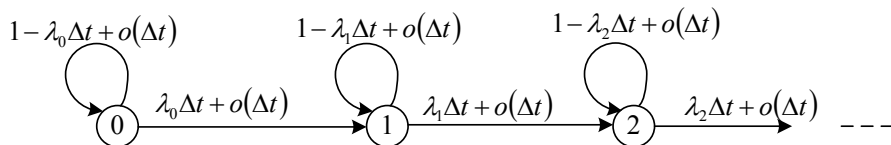
onda sledi da je Poissonov tok stacionaran. Prikaz ove osobine je dat na slici A.2.2.5.



Slika A.2.2.5. Osobina stacionarnosti Poissonovog toka

#### A.2.3. Generalizovani Poissonov tok (proces 'čistog rađanja')

Kod Poissonovog toka dolazaka smo videli da svi međudolasci imaju istu gustinu raspodele, a to je eksponencijalna raspodela sa parametrom  $\lambda$  data u (A.2.2.14). Kod generalizovanog Poissonovog toka svi međudolasci takođe imaju eksponencijalnu gustinu raspodele, ali se parametar  $\lambda$  menja od dolaska do dolaska tj.  $\lambda \neq const$ . Pošto  $\lambda$  zavisi od broja prispelih korisnika onda se taj parametar obeležava sa  $\lambda_n, n=0,1,2,\dots$ . Takođe, i u slučaju generalizovanog Poissonovog toka važi da su svi međudolasci međusobno nezavisni. U slučaju da je  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$  tada je to Poissonov tok razmatran u sekciji A.2.2. Generalizovani Poissonov tok se još naziva i proces 'čistog rađanja', a razlog za to se lako može izvesti ako se pogleda slika A.2.3.1 jer u ovakvom posmatranju procesa imamo samo pristizanje ('rađanje') korisnika, a ne i odlaske ('umiranje') korisnika tako da imamo samo akumulaciju korisnika u sistemu.



Slika A.2.3.1. Dijagram toka za proces 'čistog rađanja'

Na slici A.2.3.1 krugovi obeležavaju stanje sistema tj. broj korisnika u sistemu, a pošto korisnici u ovom slučaju samo dolaze, ali ne odlaze onda je to i broj korisnika koji je došao u sistem.

#### A.2.4. Obnavljajući proces (tok)

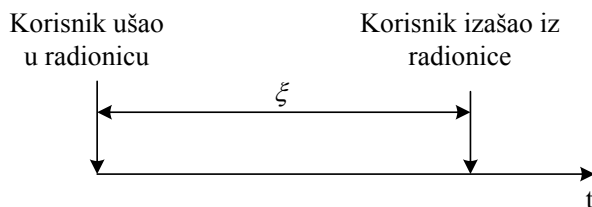
Za proces (tok) dolazaka kažemo da je obnavljajuć ako svi međudolasci imaju istu (bilo koju) gustinu raspodele i međusobno su nezavisni. Ako je raspodela eksponencijalna onda je to Poissonov tok.

### A.3. Procesi obrade korisnika

U teoriji servisnih sistema pored procesa dolazaka korisnika koji opisuje kako korisnici pristižu u sistem, definiše se još jedan važan proces, a to je proces obrade korisnika. Kada korisnici stignu u sistem, ako budu prihvaćeni onda oni eventualno čekaju u čekaonici pa pređu u radionicu ili odmah uđu u radionicu gde ih obrađuje serviser. Svaki korisnik sa sobom nosi svoj posao koji servisni sistem treba da obradi. Tu obradu vrše serviseri iz radionice. Vreme koje korisnik provede u radionici je vreme obrade korisnika i ono se smatra slučajnom veličinom u teoriji servisnih sistema. Pošto u opštem slučaju korisnici nose različite količine posla sa sobom onda se i vreme koje korisnik provede u radionici dok se posao ne završi razlikuje od korisnika do korisnika. Svaki serviser se karakteriše kapacitetom servisera koji u stvari predstavlja koliko posla serviser može da obavi u jedinici vremena. Tako da se vreme obrade po korisniku u jedinicama može definisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 \text{vreme obrade po korisniku} &= \text{količina posla koju nosi korisnik} / \text{kapacitet servisera} \\
 \text{količina posla koju nosi korisnik} &= \text{jedinica posla} / \text{korisnik} \\
 \text{kapacitet servisera} &= \text{jedinica posla} / \text{jedinica vremena} \\
 \text{vreme obrade po korisniku} &= \text{jedinica vremena} / \text{korisnik}
 \end{aligned}$$

Vreme obrade korisnika je vreme od trenutka kad je korisnik ušao u radionicu do trenutka kad je korisnik izašao iz radionice i smatra se kontinualnom pozitivnom slučajnom veličinom koja se obeležava sa  $\xi$ .

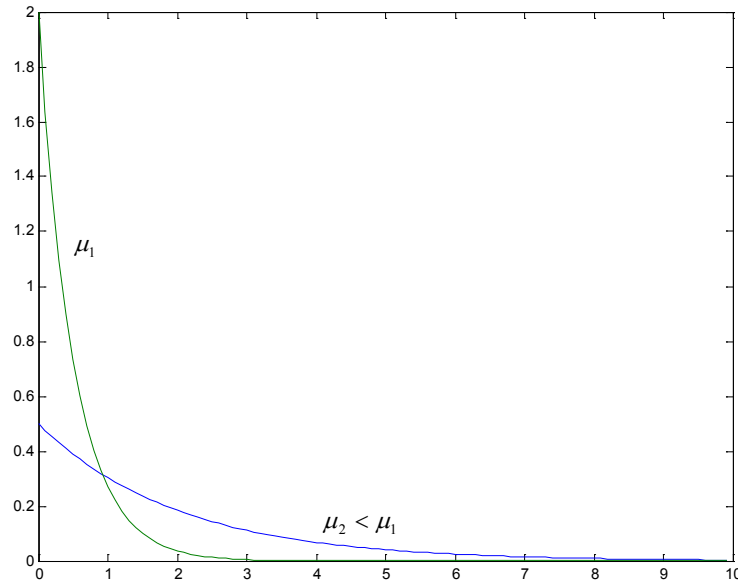


Slika A.3.1. Slučajna promenjiva vremena obrade korisnika

### A.3.1. Eksponencijalna raspodela vremena obrade korisnika

U ovom slučaju  $\xi$  ima eksponencijalnu gustinu raspodele i ovaj slučaj se u Kendallovom sistemu označavanja označava sa M. Definicija funkcije gustine raspodele za eksponencijalnu raspodelu je data u (A.3.1.1). Na slici A.3.1.1 je prikazana funkcija gustine raspodele za dve vrednosti parametra  $\mu$ . Sa slike A.3.1.1 se može primetiti da što je veća vrednost parametra  $\mu$  to je strmija kriva funkcije gustine raspodele u početnom delu.

$$w_{\xi}(x) = \mu \cdot e^{-\mu x}, x \geq 0 \quad (\text{A.3.1.1})$$



Slika A.3.1.1. Eksponencijalna raspodela (funkcija gustine)

Osobine eksponencijalne raspodele:

- 1) Površina ispod funkcije gustine raspodele je jednaka 1

$$\int_0^{\infty} w_{\xi}(x) dx = 1 \quad (\text{A.3.1.2})$$

- 2) Prosečno vreme obrade korisnika (srednja vrednost)

$$\bar{\xi} = m_{\xi} = E(\xi) = \int_0^{\infty} x w_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\mu} \quad (\text{A.3.1.3})$$

- 3) Varijansa

$$\sigma_{\xi}^2 = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_0^{\infty} (x - m_{\xi})^2 w_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\mu^2} \quad (\text{A.3.1.4})$$

- 4) Generišuća funkcija  $\Phi_{\xi}(s)$

$$\Phi_{\xi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} w_{\xi}(x) dx = \frac{\mu}{s + \mu} \quad (\text{A.3.1.5})$$

5) *Odsustvo memorije (Markovljevo svojstvo)*

$$P\{\xi > t + x / \xi > t\} = \frac{P\{\xi > t + x, \xi > t\}}{P\{\xi > t\}} = \frac{\int_{x+t}^{\infty} \mu e^{-\mu u} du}{\int_t^{\infty} \mu e^{-\mu u} du} = \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu x} \quad (\text{A.3.1.6})$$

Na osnovu (A.3.1.6) vidimo da rezultat ne zavisi od  $t$  pa odatle zaključujemo da eksponencijalna raspodela ima Markovljevo svojstvo tj. svojstvo odsustva memorije.

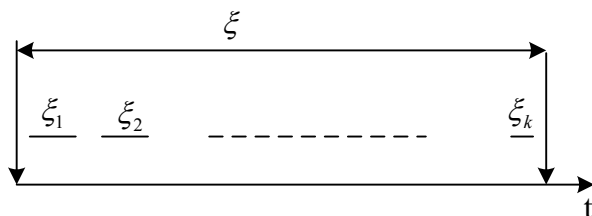
6) *Veza sa Poissonovom raspodelom*

Pošto su vremena obrade korisnika međusobno nezavisna i sve obrade imaju eksponencijalnu raspodelu sa istim parametrom  $\mu$  onda izlasci iz radionice tj. servisnog sistema (završeci obrade) odgovaraju Poissonovom toku sa parametrom  $\lambda = \mu$ .

### A.3.2. Erlangijanova raspodela

Erlangijanova raspodela se izvodi iz eksponencijalne raspodele. Kendallova oznaka za ovaj slučaj je  $E_k$ , gde  $k$  označava Erlangijanovu raspodelu  $k$ -tog reda. Ova raspodela podrazumeva da korisnik ide na obradu kod prvog servisera, a kad kod njega završi ide kod drugog i tako sve do  $k$ -tog servisera, pri čemu svih  $k$  servisera ima istu eksponencijalnu raspodelu sa istim parametrom  $\mu$ :

$$w_{\xi_i}(x) = \mu \cdot e^{-\mu x}, x \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (\text{A.3.2.1})$$



Slika A.3.2.1. Slučajna promenjiva Erlangijanove raspodele

Kao što se vidi sa slike A.3.2.1 slučajna promenjiva  $\xi$  koja odgovara ukupnom vremenu obrade je jednaka zbiru pojedinačnih vremena obrade, tj. slučajnih promenljivih  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) koje njima odgovaraju:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \quad (\text{A.3.2.2})$$

Pošto su  $\xi_i$  međusobno nezavisne onda je generišuća funkcija Erlangijanove raspodele  $\Phi_{\xi}(s)$  jednaka proizvodu generišućih funkcija pojedinačnih eksponencijalnih raspodela  $\Phi_{\xi_i}(s)$ :

$$\Phi_{\xi}(s) = [\Phi_{\xi_i}(s)]^k = \left[ \frac{\mu}{s + \mu} \right]^k \quad (\text{A.3.2.3})$$

Izraz (A.3.2.3) predstavlja generišuću funkciju za Erlangijanovu raspodelu. Inverznom transformacijom tog izraza dobijamo gustinu raspodele za Erlangijanovu raspodelu:

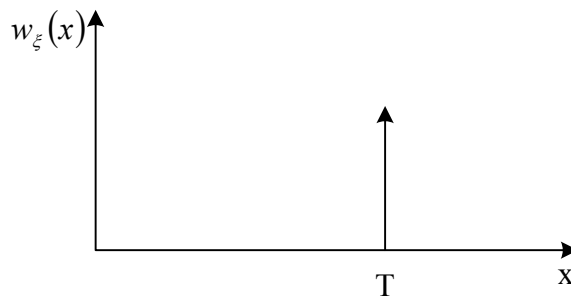
$$w_{\xi}(x) = \mu \frac{(\mu \cdot x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x}, \quad x \geq 0 \quad (\text{A.3.2.4})$$

### A.3.3. Deterministička raspodela

Kendalova oznaka za ovu raspodelu je D. Ova raspodela podrazumeva da svi korisnici imaju istu količinu posla tj. vreme obrade svakog korisnika je isto ( $\xi = T = \text{const.}$ , gde je  $T$  fiksno vreme obrade korisnika). Gustina ove raspodele je data u (A.3.3.1) i predstavlja Dirakov impuls u  $x = T$ :

$$w_{\xi}(x) = \delta(x - T) \quad (\text{A.3.3.1})$$

Srednja vrednost ove raspodele je  $T$  ( $m_{\xi} = T$ ), a varijansa je nula ( $\sigma_{\xi}^2 = 0$ ).



Slika A.3.3.1. Deterministička raspodela (funkcija gustine)

### A.3.4. Generalna raspodela

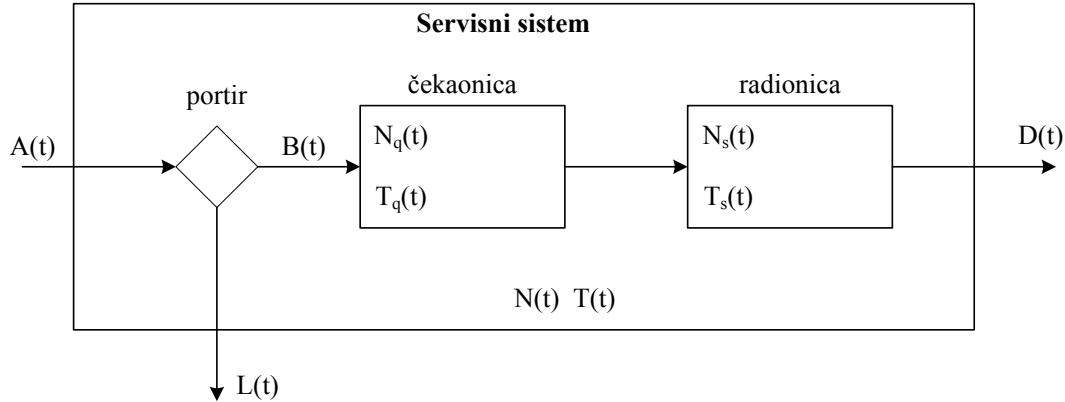
Kendalova oznaka za ovu raspodelu je G. Ova raspodela podrazumeva da za gustinu raspodele imamo bilo koju funkciju  $f(x)$  koja zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{aligned} w_{\xi}(x) &= f(x), \quad x \geq 0 \\ f(x) &= 0, \quad x < 0 \\ \int_0^{\infty} f(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.3.4.1})$$

Pri tome pretpostavljamo da su za funkciju  $f(x)$  poznati parametri: srednja vrednost  $m_{\xi}$  i varijansa  $\sigma_{\xi}^2$ .

## A.4. Procesi koji opisuju stanje sistema

Na slici A.4.1 je prikazan jedan servisni sistem sa obeleženim svim relevantnim parametrima sistema:



Slika A.4.1. Servisni sistem

Definicije parametara servisnog sistema:

- $N(t)$  – Broj korisnika u servisnom sistemu u trenutku  $t$
- $N_q(t)$  – Broj korisnika u čekaonici u trenutku  $t$
- $N_s(t)$  – Broj korisnika u radionici u trenutku  $t$
- $T(t)$  – Vreme zadržavanja korisnika u sistemu
- $T_q(t)$  – Vreme čekanja korisnika u čekaonici
- $T_s(t)$  – Vreme obrade (servisiranja) korisnika
- $A(t)$  – Tok dolazaka korisnika u servisni sistem
- $B(t)$  – Tok korisnika koji su primljeni na obradu
- $L(t)$  – Tok korisnika koji su odbijeni (izgubljeni)
- $D(t)$  – Tok odlazaka korisnika iz servisnog sistema

Očigledno je sa slike A.4.1 da važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_q(t) + N_s(t) \\ T(t) &= T_q(t) + T_s(t) \end{aligned} \quad (\text{A.4.1})$$

Pretpostavljamo da je tok dolazaka  $A(t)$  stacionaran proces tj. da važi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda = \text{const.} \quad (\text{A.4.2})$$

Takođe pretpostavljamo da servisni sistem ima moć da obradi sve korisnike koje primi na obradu, a to znači da pretpostavljamo i da su tokovi  $L(t)$  i  $D(t)$  takođe stacionarni:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} &= \gamma \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t} &= \lambda - \gamma = P_L \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.4.3})$$

Parametar  $\lambda$  označava protok korisnika koji dolaze u servisni sistem, a  $\gamma$  označava propusnost sistema tj. protok korisnika koji napuštaju servisni sistem obavljenog posla.  $P_L$  označava verovatnoću gubitka korisnika, a  $P_L \lambda$  je protok izgubljenih korisnika. Iz izraza za stacionarnost toka  $L(t)$  u (A.4.3) vidimo da pretpostavljamo da važi konzervacija protoka tj.

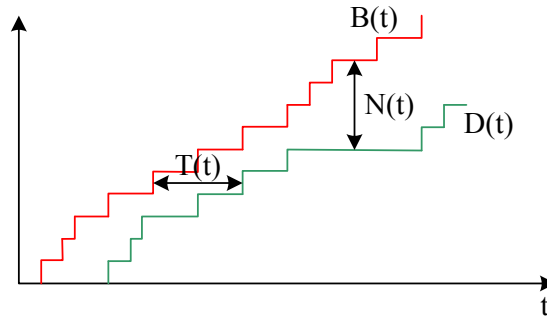
$$[A(t) = L(t) + D(t)]_{t \rightarrow \infty} \quad (\text{A.4.4})$$

Takođe, važi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = \gamma = \text{const.} \quad (\text{A.4.5})$$

$N(t)$  je broj korisnika u sistemu u trenutku  $t$  i to je slučajna veličina koju nazivamo stanje sistema. Sa slike A.4.2, jasno se vidi da je:

$$N(t) = B(t) - D(t) \quad (\text{A.4.6})$$



Slika A.4.2. Definicije osnovnih veličina servisnog sistema

$T(t)$  je vreme zadržavanja prihvaćenih korisnika u servisnom sistemu i to je takođe slučajna veličina, a na slici A.4.2 se vidi kako se definiše ta slučajna veličina. Obično nas interesuju srednje vrednosti ovih dveju slučajnih veličina, kao i ekvivalentnih slučajnih veličina koje se odnose na čekaonicu i radionicu ( $N_q(t)$ ,  $N_s(t)$ ,  $T_q(t)$ ,  $T_s(t)$ ). Za srednje vrednosti navedenih slučajnih veličina, važe identične relacije kao i za same slučajne veličine date u (A.4.1):

$$\begin{aligned} N &= N_q + N_s \\ T &= T_q + T_s \end{aligned} \quad (\text{A.4.7})$$

Sve oznake u (A.4.7) se odnose na srednje vrednosti odgovarajućih slučajnih veličina.

Verovatnoća da se servisni sistem nalazi u stanju  $n$  (u sistemu se nalazi  $n$  korisnika) označavamo sa  $p_n(t)$ :

$$P\{N(t) = n\} = p_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (\text{A.4.8})$$

gde je sa  $k$  je obeležen kapacitet servisnog sistema.

Smatraćemo da je ispunjen uslov stacionarnosti tj. da je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n \quad (\text{A.4.9})$$



Kad se sistem nalazi u stacionarnom stanju to znači da su verovatnoće stanja konstantne i samim tim ne zavise od vremena. Pošto smatramo da je ispunjen uslov stacionarnosti servisnog sistema onda ćemo verovatnoće stanja obeležavati sa  $p_n$  (verovatnoća da se servisni sistem nalazi u stanju  $n$ , odnosno da se u sistemu nalazi  $n$  korisnika). Verovatnoće stanja  $p_n$  odgovaraju aspektu posmatrača sa strane, tj. to je verovatnoća da posmatrač sa strane vidi sistem u stanju  $n$ , odnosno vidi da je broj korisnika u sistemu jednak  $n$ .

S druge strane definiše se još jedna verovatnoća, a to je verovatnoća zatečenog stanja koja odražava aspekt posmatranja stanja sistema iz ugla korisnika koji dolazi u sistem. Te verovatnoće se obeležavaju sa  $q_n$  i ona označava da će korisnik koji uđe u servisni sistem zateći sistem u stanju  $n$  tj. da će zatečeni broj korisnika u sistemu biti  $n$ . Nađimo zavisnost između verovatnoća  $p_n$  i  $q_n$ .

$$\begin{aligned}
q_n(t) &= P\{N(t) = n / A(t + \Delta t) - A(t) = 1\} = \\
&= \frac{P\{N(t) = n, A(t + \Delta t) - A(t) = 1\}}{P\{A(t + \Delta t) - A(t) = 1\}} = \\
&= \frac{P\{N(t) = n, A(t + \Delta t) - A(t) = 1\}}{\sum_{n=0}^k P\{N(t) = n, A(t + \Delta t) - A(t) = 1\}} = \\
&= \frac{P\{N(t) = n\}P\{A(t + \Delta t) - A(t) = 1 / N(t) = n\}}{\sum_{n=0}^k P\{N(t) = n\}P\{A(t + \Delta t) - A(t) = 1 / N(t) = n\}} = \\
&= \frac{p_n(t)[\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)]}{\sum_{n=0}^k p_n(t)[\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k
\end{aligned} \tag{A.4.10}$$

Sa  $k$  je obeležen kapacitet servisnog sistema ( $k \rightarrow \infty$  za beskonačan kapacitet). Ukoliko posmatramo stacionaran režim i pustimo da  $t \rightarrow \infty$  dobijamo verovatnoću zatečenog stanja u stacionarnom režimu:

$$q_n = \frac{p_n \lambda_n}{\sum_{n=0}^k p_n \lambda_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k \tag{A.4.11}$$

U opštem slučaju je  $p_n \neq q_n$ , tj. verovatnoća stanja sistema zavisi od ugla posmatrača. Ukoliko važi jednakost  $p_n = q_n$  onda kažemo da tok dolazaka ima osobinu PASTA (*Poisson Arrivals See Time Average*). Poissonov tok dolazaka ima osobinu PASTA što se lako dokazuje:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda \\
\Rightarrow q_n &= \frac{p_n \lambda_n}{\sum_{n=0}^k p_n \lambda_n} = \frac{p_n \lambda}{\sum_{n=0}^k p_n \lambda} = \frac{p_n}{\sum_{n=0}^k p_n} = \frac{p_n}{1} = p_n
\end{aligned} \tag{A.4.12}$$

Kod servisnih sistema konačnog kapaciteta se uvode još i pojmovi verovatnoće blokade  $P_B$  i verovatnoće izgubljenog korisnika  $P_L$ . Verovatnoća blokade je verovatnoća da posmatrač sa strane vidi da je sistem pun:

$$P_B = p_k \quad (\text{A.4.13})$$

Verovatnoća izgubljenog korisnika (gubitka korisnika) je verovatnoća događaja da korisnik na ulasku u sistem zatekne pun sistem:

$$P_L = q_k \quad (\text{A.4.14})$$

Sa  $k$  je označen kapacitet servisnog sistema.

Ako važi PASTA onda je  $P_B = P_L$ . Iz uslova konzervacije protoka (protok na ulazu u sistem je jednak zbiru tokova izgubljenih korisnika i toka obrađenih korisnika) imamo relaciju:

$$\begin{aligned} A(t) &= D(t) + L(t) \\ \Rightarrow \lambda &= \gamma + P_L \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.4.15})$$

Za sisteme beskonačnog kapaciteta imamo da je  $P_L = 0$ , pa odatle sledi da je  $\gamma = \lambda$ . Servisni sistem je stabilan ako je verovatnoća da se sistem nalazi u praznom stanju različita od nule ( $p_0 \neq 0$ ) i da je verovatnoća da u sistemu ima beskonačno mnogo korisnika jednaka 0 ( $p_\infty \rightarrow 0$ ). Ovakav sistem je dobar sistem jer u suprotnom bi došlo do nagomilavanja beskonačno mnogo korisnika u sistemu, pa bi sistem praktično predstavljao neku vrstu crne rupe. Takođe, da bi sistem bio dobar neophodno je da sistem povremeno bude prazan pošto to označava da sistem stiže da obradi sve zahteve pa je to znak da je sistem dobro projektovan.

#### A.4.1 Littlova (*Little-ova*) teorema

Littlova teorema kaže da za stabilan sistem važi relacija:

$$N = \gamma T \quad (\text{A.4.1.1})$$

Pri tome je  $N$  – srednji broj korisnika u sistemu,  $T$  srednje vreme zadržavanja korisnika u sistemu i  $\gamma$  protok obrađenih korisnika na izlazu iz sistema.

Pored primene ove relacije na ceo servisni sistem, ova relacija se može primeniti i na delove servisnog sistema: radionicu i čekaonicu:

$$\begin{aligned} N_S &= \gamma T_S \\ N_Q &= \gamma T_Q \end{aligned} \quad (\text{A.4.1.2})$$

Pri tome je  $N_Q$  - srednji broj korisnika u čekaonici,  $N_S$  - srednji broj korisnika u radionici,  $T_Q$  - srednje vreme čekanja korisnika u čekaonici,  $T_S$  - srednje vreme servisiranja korisnika u radionici. Ova teorema važi za bilo koju disciplinu čekanja.

#### **Dokaz:**

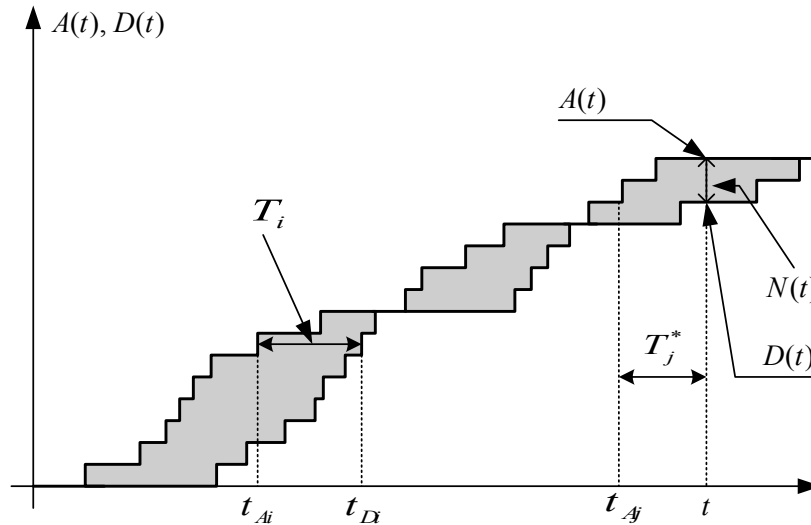
Posmatrajmo proizvoljni stabilni servisni sistem sa disciplinom čekanja FCFS. Označimo sa  $A(t)$  brojački proces dolazaka korisnika u čekaonicu sistema, a sa  $D(t)$  brojački proces odlazaka korisnika iz radionice sistema i pretpostavimo da su ovi procesi ergodični, tj. pretpostavimo da važi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} = \gamma \quad (\text{A.4.1.3})$$

pri čemu  $\gamma$  predstavlja protok odlazaka korisnika. Neka je  $N$  srednji broj korisnika u sistemu, a  $T$  srednje vreme zadržavanja korisnika u sistemu. Tada važi, po Littlovoj teoremi:

$$N = \gamma T \quad (\text{A.4.1.4})$$

Ova relacija poznata je kao **Littlova formula**.



Slika A.4.1.1. Elementi za dokazivanje Littlove formule

Da bi dokazali tačnost Littlove formule posmatrajmo sliku A.4.1.1. Na njoj su predstavljeni brojački procesi  $A(t)$  i  $D(t)$ . Dodatno, sa  $N(t)=A(t)-D(t)$  označen je broj korisnika u sistemu u trenutku  $t$ , a sa  $T_i=t_{Di}-t_{Ai}$  zadržavanje  $i$ -tog korisnika u sistemu (koji je došao u čekaonicu u trenutku  $t_{Ai}$ , a napustio sistem u trenutku  $t_{Di}$ ), i sa  $T_j^*=t-t_{Aj}$  zadržavanje  $j$ -tog korisnika u sistemu (koji do došao u trenutku  $t_{Aj}$ , a do trenutka  $t$  nije napustio sistem). Imajući u vidu da iznos “skoka” procesa  $A(t)$  i  $D(t)$  iznosi 1 po korisniku, lako se uveravamo da ukupno vreme zadržavanja korisnika,  $S(t)$ , do trenutka  $t$  iznosi:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{D(t)} T_i + \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* = \int_0^t N(u) du \quad (\text{A.4.1.5})$$

Na slici A.4.1.1,  $S(t)$  je predstavljena kao osenčena površina. Dalje, prema definiciji za srednju vrednost imamo:

$$N = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(u) du = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} \quad (\text{A.4.1.6})$$

i

$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{D(t)} \sum_1^{D(t)} T_i \quad (\text{A.4.1.7})$$

Množeći i deleći desnu stranu jednačine (A.4.1.6) sa  $D(t)$  i koristeći (A.4.1.5), dobijamo:

$$N = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=1}^{D(t)} T_i + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* \right] \quad (\text{A.4.1.8})$$

Ako je sistem stabilan, tada nema beskonačnog nagomilavanja korisnika (tj. sistem povremeno mora da bude prazan), odakle zaključujemo da vredi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* = 0 \quad (\text{A.4.1.9})$$

Konačno, imajući u vidu definicije (A.4.1.3) i (A.4.1.7) dobijamo relaciju (A.4.1.4), čime je Littlova formula dokazana kada su u pitanju srednje vrednosti po vremenu. Za većinu sistema, u uslovima statističke ravnoteže, vreme zadržavanja i broj korisnika u sistemu ispunjavaju uslov ergodičnosti. Stoga, u takvim sistemima vredi Littlova formula i kada se  $N$  i  $T$  dobijaju kao statističke srednje vrednosti.

Littlova formula vredi i za delove servisnog sistema. Saglasno tome imamo:

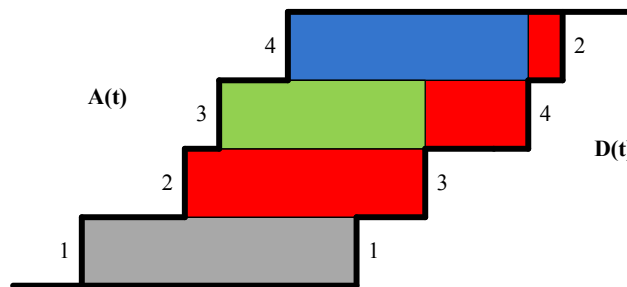
$$N_Q = \gamma T_Q \quad (\text{A.4.1.10})$$

i

$$N_S = \gamma T_S = \frac{\gamma}{\mu} \quad (\text{A.4.1.11})$$

gde su  $N_Q$  i  $T_Q$  srednji broj korisnika u čekaonici i srednje vreme čekanja,  $N_S$  i  $T_S$  srednji broj korisnika u radionici i srednje vreme posluživanja (servisiranja).

Na kraju napomenimo, da Littlova formula vredi i za druge discipline čekanja. Pošto je sistem stabilan, onda je sistem povremeno prazan, pa i dalje nezavisno od discipline čekanja važi (A.4.1.9). Potom, u izrazu (A.4.1.7) veličinu  $T_i$  predstavimo kao razliku vremena odlaska  $t_{Di}$  i vremena dolaska  $t_{Ai}$ , a zatim sumu razlika predstavimo kao razliku suma. U razlici suma ćemo poređati dolaske i odlaske po njihovom redosledu dešavanja, tj. ne ređamo ih po korisnicima. Ovakvim ređanjem opet dobijamo izraz za veličinu osenčene površine sa slike A.4.1.1, odnosno ukupnog vremena zadržavanja korisnika u sistemu  $S(t)$ . Ostatak izvođenja ostaje identičan kao u FCFS slučaju. Prema tome, za sve discipline posluživanja važi Littlova formula. Slika A.4.1.2 ilustruje na jednom konkretnom primeru da osenčena površina i dalje odgovara ukupnom vremenu zadržavanja korisnika u servisnom sistemu nezavisno od discipline posluživanja. Vreme zadržavanja svakog od korisnika je obeleženo drugačijom bojom.



Slika A.4.1.2. Osenčena površina odgovara ukupnom vremenu zadržavanja svih korisnika

## A.5. Model 'rađanja i umiranja'

Po definiciji ovog modela važi relacija A.5.1:

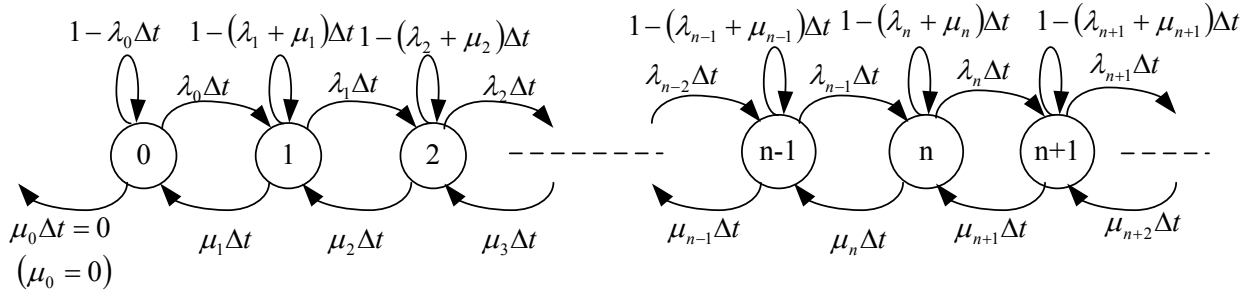
$$P\{N(t + \Delta t) = n + k / P\{N(t) = n\}\} = \begin{cases} \mu_n \Delta t + o(\Delta t), & k = -1 \\ 1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t), & k = 0 \\ \lambda_n \Delta t + o(\Delta t), & k = 1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases} \quad (\text{A.5.1})$$

$$\mu_n, \lambda_n \geq 0 \text{ i } \mu_0 = 0$$

Relacija (A.5.1) u stvari znači da se u nekom određenom trenutku vremena ( $t \rightarrow 0$ ) može desiti neki od moguća 3 događaja:

- Iz sistema je otišao jedan korisnik ( $k = -1$ )
- U sistem je ušao jedan korisnik ( $k = 1$ )
- Niti je ušao korisnik u sistem, niti je izašao iz njega ( $k = 0$ )

Svi ostali događaji su nemogući tj. verovatnoća da se oni dese je beskonačno mala veličina višeg reda. Na slici A.5.1 je grafički prikazan dijagram stanja sistema na nivou protoka korisnika:



Slika A.5.1. Dijagram toka za model 'rađanja i umiranja'

### A.5.1. Diferencijalno-diferencne jednačine

Postavimo izraze za  $p_n(t + \Delta t)$  i  $p_0(t + \Delta t)$  koji predstavljaju da će se sistem u trenutku  $t + \Delta t$  naći u stanju  $n$ , odnosno 0:

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= p_n(t)[1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)] + p_{n-1}(t)[\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)] + \\ &+ p_{n+1}(t)[\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t), \quad n > 0 \\ p_0(t + \Delta t) &= p_0(t)[1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)] + p_1(t)[\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t), \quad n = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5.1.1})$$

Na osnovu (A.5.1.1) vidimo da u stanje  $n$  u trenutku  $t + \Delta t$  možemo preći iz stanja  $n-1$  ako je došao jedan korisnik u sistem u  $\Delta t$  intervalu, iz stanja  $n+1$  ako je iz sistema otišao jedan korisnik u  $\Delta t$  intervalu, ili ako u  $\Delta t$  intervalu nije ni došao ni otišao nijedan korisnik. Za stanje 0 nemamo slučaj da dođe korisnik u intervalu  $\Delta t$  iz prethodnog stanja jer prethodnog stanja nema. Takođe, ako je sistem ostao u stanju 0 tada samo nije došao nijedan korisnik, s obzirom da u stanju 0 nema korisnika pa time nijedan korisnik nije ni mogao otići.

Dalje, (A.5.1.1) možemo pisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} &= p_{n-1}(t) \left[ \lambda_{n-1} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] - p_n(t) \left[ \lambda_n + \mu_n + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] + \\ &+ p_{n+1}(t) \left[ \mu_{n+1} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5.1.2})$$

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -p_0(t) \left[ \lambda_0 + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] + p_1(t) \left[ \mu_1 + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad n = 0$$

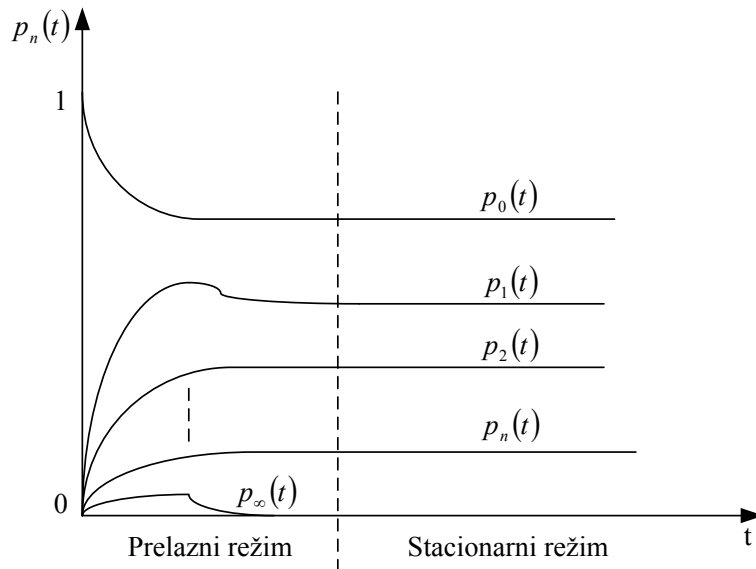
Ako pustimo da  $\Delta t \rightarrow 0$  tj. posmatramo beskonačno mali interval (praktično jedan trenutak) dobijamo diferencno-diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - [\lambda_n + \mu_n] p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t), \quad n > 0 \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \quad n = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5.1.3})$$

Početni uslov podrazumeva da je sistem u početku ( $t = 0$ ) bio prazan:

$$\begin{aligned} p_n(0) &= 0, \quad n > 0 \\ p_0(0) &= 1, \quad n = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5.1.4})$$

Pri tome, u svakom trenutku je zbir svih verovatnoća 1 ( $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$ ). Na slici A.5.1.1 je prikazano tipično rešenje za stabilni sistem.



Slika A.5.1.1. Rešenja za verovatnoće stanja modela 'rađanja i umiranja'

Sa slike A.5.1.1 vidimo da razlikujemo dva režima, prelazni režim i stacionarni režim. Za stabilni sistem verovatnoća da se u sistemu nalazi beskonačno mnogo korisnika teži nuli. Kod nestabilnog sistema ova verovatnoća je različita od nule, pa je to servisni sistem koji je loše projektovan i ne stiže da obradi sve korisnike pa se oni čitavo vreme gomilaju u sistemu tj.

sistem predstavlja svojevrsnu crnu rupu za korisnike. U nastavku ćemo posmatrati stacionarni režim tj. za dovoljno veliko  $t$  važi  $p_n(t) = p_n$ .

### A.5.2. Rešenje u stacionarnom režimu

Pošto su verovatnoće stanja sada konstantne onda sledi:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = 0, \quad n \geq 0 \quad (\text{A.5.2.1})$$

Tada iz uslova (A.5.2.1) i izraza (A.5.1.3) dobijamo globalne diferencne jednačine:

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}p_{n-1} - [\lambda_n + \mu_n]p_n + \mu_{n+1}p_{n+1} &= 0, \quad n > 0 \\ -\lambda_0p_0 + \mu_1p_1 &= 0, \quad n = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5.2.2})$$

Iz globalnih diferencnih jednačina možemo da dobijemo relacije:

$$\lambda_n p_n - \mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n = \lambda_{n-2} p_{n-2} - \mu_{n-1} p_{n-1} = \dots = \lambda_0 p_0 - \mu_1 p_1 = 0 \quad (\text{A.5.2.3})$$

Na osnovu (A.5.2.3) pišemo lokalne diferencne jednačine:

$$\lambda_n p_n - \mu_{n+1} p_{n+1} = 0, \quad n \geq 0 \quad (\text{A.5.2.4})$$

Na osnovu globalnih diferencnih jednačina vidimo da važi zakon o konzervaciji protoka za svaki čvor tj. stanje sistema. Možemo reći da postoji ravnoteža između ulaza i izlaza:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_n p_n + \mu_n p_n, \quad (\text{A.5.2.5})$$

gde je  $\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}$  ulaz u stanje  $n$  (došao korisnik pa se prešlo iz stanja  $n-1$  u stanje  $n$  ili otišao korisnik pa se iz stanja  $n+1$  prešlo u stanje  $n$ ),  $\lambda_n p_n + \mu_n p_n$  izlaz iz stanja  $n$  (došao korisnik pa se iz stanja  $n$  prešlo u stanje  $n+1$  ili otišao korisnik pa se iz stanja  $n$  prešlo u stanje  $n-1$ ). Jedino je za stanje  $n=0$  izraz (A.5.2.5) redukovan na:

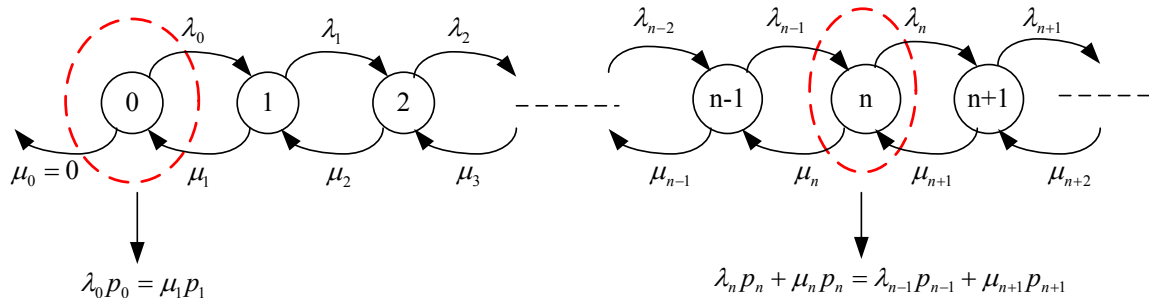
$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0 \quad (\text{A.5.2.6})$$

jer nema stanja  $n = -1$ . Lokalne diferencne jednačine takođe predstavljaju odraz konzervacije protoka:

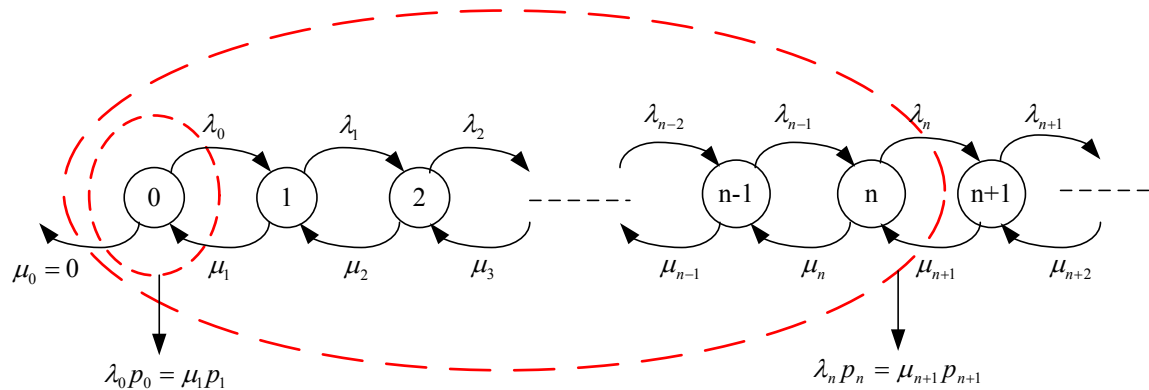
$$\mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_n p_n, \quad (\text{A.5.2.7})$$

gde je  $\mu_{n+1} p_{n+1}$  ulaz stanja  $n$ ,  $\lambda_n p_n$  izlaz stanja  $n$  na preseku između dva susedna stanja  $n$  i  $n+1$ .

Razlika između globalnih i lokalnih diferencnih jednačina je prikazana na slikama A.5.2.1 (globalne) i A.5.2.2 (lokalne):



Slika A.5.2.1. Globalne diferencne jednačine



Slika A.5.2.2. Lokalne diferencne jednačine

### A.5.3. Verovatnoće stanja u stacionarnom režimu

Na osnovu lokalnih diferencnih jednačina možemo da pišemo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu_0 p_0 \\
 \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 &\Rightarrow p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\
 \lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2 &\Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n &\Rightarrow p_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_2 \mu_1} p_0
 \end{aligned}
 \tag{A.5.3.1}$$

Takođe, važi relacija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n p_n
 \tag{A.5.3.2}$$

koju dobijamo ako saberemo sve lokalne diferencne jednačine. Takođe znamo da zbir svih verovatnoća mora biti jednak 1 (sistem se mora naći u nekom stanju):

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1
 \tag{A.5.3.3}$$

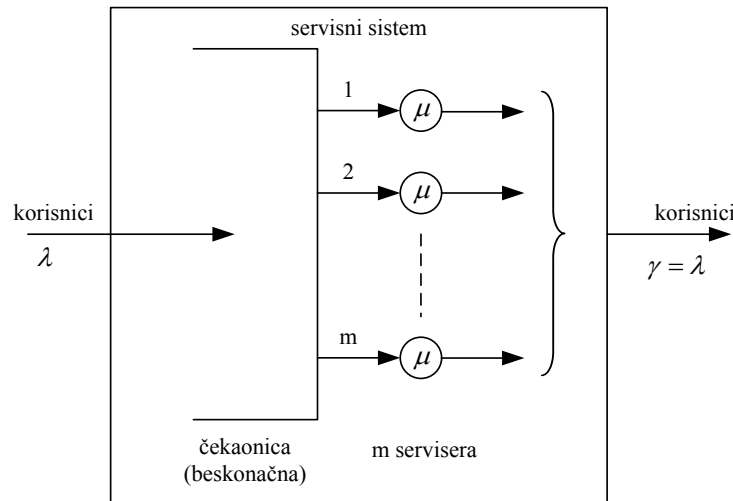


Na osnovu (A.5.3.1) i (A.5.3.3) imamo da je verovatnoća stanja  $n = 0$ :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} \quad (\text{A.5.3.4})$$

## A.6. M/M/m sistemi

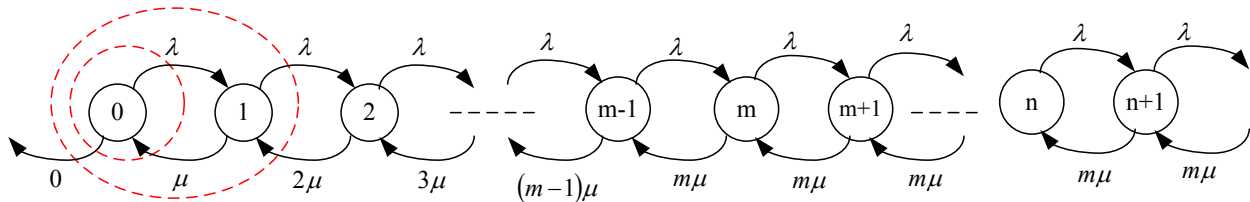
Kod ovih modela korisnici dolaze po Poissonu (kao Poissonov tok) sa parametrom  $\lambda$ . Sistem je sa beskonačnom čekaonicom i  $m$  serviseru (sistem beskonačnog kapaciteta). Proces obrade korisnika je po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom  $\mu$ . Disciplina posluživanja je FCFS. Specijalni slučajevi ovih sistema su M/M/1 (jedan serviser) i M/M/ $\infty$  (beskonačno serviseru) sistemi. Jedan M/M/m sistem je prikazan na slici A.6.1.



M/M/m sistem

Slika A.6.1. M/M/m sistem

Dijagram toka za M/M/m sistem je prikazan na slici A.6.2.



Slika A.6.2. Dijagram toka za M/M/m sistem

Možemo uočiti da vrednosti  $\mu_n$  linearno rastu do stanja  $m$ , a potom ostaju konstantne. To je usled toga što u stanju  $i \leq m$  je zaposleno ukupno  $i$  serviseru, a ostali su bez posla i usled toga radionica radi sa ukupnom snagom  $i\mu$ . Za slučajeve  $i > m$  svi serviseri su zaposleni, i postoje korisnici u čekaonici pa radionica radi ukupnom snagom  $m\mu$  nezavisno od broja korisnika u čekaonici.

Dalje, za ovaj sistem na osnovu dijagrama toka možemo pisati sistem lokalnih jednačina (napomena: na slici A.6.2 su označene konture za prve dve lokalne jednačine):

$$\begin{aligned}
\mu p_1 &= \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\
2\mu p_2 &= \lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \\
3\mu p_3 &= \lambda p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0 \\
&\vdots \\
m\mu p_m &= \lambda p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{\lambda^m}{m!\mu^m} p_0 \\
m\mu p_{m+1} &= \lambda p_m \Rightarrow p_{m+1} = \frac{\lambda^{m+1}}{m \cdot m!\mu^{m+1}} p_0 \\
&\vdots \\
m\mu p_n &= \lambda p_{n-1} \Rightarrow p_n = \frac{\lambda^n}{m^{n-m} m!\mu^n} p_0 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{A.6.1}$$

Na osnovu (A.6.1) možemo napisati opšti izraz:

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \leq n < m \\
p_n &= \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{A^n}{m^{n-m} m!} p_0, \quad n \geq m \\
\rho &= \frac{\lambda}{m\mu} \\
A &= \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned} \tag{A.6.2}$$

Parametar  $\rho$  označava iskorišćenje serviseru (što je  $\rho$  veće serviseri su više iskorišćeni tj. veći deo vremena su zauzeti obradom korisnika, a manje vremena su slobodni bez posla). Parametar  $A$  označava ponudeni saobraćaj i jedinica za  $A$  je Erlang (E).

Iz uslova (A.5.3.3) nalazimo verovatnoću da je sistem prazan,  $p_0$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} p_0 + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n p_0 = 1 \\
\Rightarrow p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho}}
\end{aligned} \tag{A.6.3}$$

Ukoliko je  $\rho \geq 1$  suma  $\sum_{n=m}^{\infty} \rho^n$  divergira pa je verovatnoća  $p_0 = 0$  tj. sistem nikada nije prazan, odnosno takav servisni sistem je nestabilan sistem. Da bi sistem bio stabilan mora biti ispunjen uslov da je iskorišćenje serviseru manje od 1 (serviser mora povremeno biti nezauzet tj. sistem mora povremeno biti prazan). Stoga, ako je ispunjen uslov  $\rho < 1$ , sistem je stabilan.

Verovatnoća čekanja  $P_Q$  je verovatnoća da korisnik po ulasku u servisni sistem mora da čeka tj. u tom momentu su svi serviseri zauzeti. Po definiciji je:

$$P_Q = \sum_{n=m}^{\infty} q_n \quad (\text{A.6.4})$$

Kod sistema sa  $m$  serviseru očigledno je verovatnoća čekanja jednaka zbiru verovatnoća da korisnik po ulasku u sistem zatekne sve serviseru zauzete (stanje sistema je veće ili jednako  $m$ ). Pošto je kod M/M/m sistema tok dolazaka Poissonov to znači da važi osobina PASTA pa je  $q_n = p_n$  pa se (A.6.4) može dalje razviti:

$$\begin{aligned} P_Q &= \sum_{n=m}^{\infty} q_n = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^m}{1-\rho} p_0 \\ \Rightarrow P_Q &= \frac{\frac{A^m}{m!(1-\rho)}}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^m}{m!(1-\rho)}} = E_2(m, A) \end{aligned} \quad (\text{A.6.5})$$

gde je sa  $E_2(m, A)$  označena *Erlangova C formula*.

### A.6.1. Srednje vrednosti

Srednje vreme servisiranja  $T_S$  je srednje vreme eksponencijalne raspodele jer je servisiranje kod M/M/m sistema po eksponencijalnoj raspodeli :

$$T_S = \frac{1}{\mu} \quad (\text{A.6.1.1})$$

Na osnovu Littlove teoreme imamo da je srednji broj korisnika u radionici:

$$N_S = \lambda T_S = \frac{\lambda}{\mu} = A \quad (\text{A.6.1.2})$$

Srednji broj korisnika u čekaonici  $N_Q$  je:

$$\begin{aligned}
N_Q &= \sum_{n=m}^{\infty} (n-m)p_n = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) \rho^{n-m} = \\
&= \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} = \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dn} (\rho^n) = \\
&= \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \rho \frac{d}{dn} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \rho \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = \frac{m^m \rho^m}{m!} p_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\
\Rightarrow N_Q &= \frac{\rho}{1-\rho} P_Q
\end{aligned} \tag{A.6.1.3}$$

Na osnovu Littleve teoreme je srednje vreme čekanja korisnika  $T_Q$ :

$$T_Q = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{P_Q}{\lambda} \tag{A.6.1.4}$$

Srednji broj korisnika u sistemu  $N$  je jednak zbiru srednjeg broja korisnika u radionici  $N_S$  i čekaonici  $N_Q$ :

$$N = N_Q + N_S = A + \frac{\rho}{1-\rho} P_Q \tag{A.6.1.5}$$

Srednje vreme zadržavanja korisnika u sistemu  $T$  je jednako zbiru srednjeg vremena čekanja  $T_Q$  i srednjeg vremena servisiranja korisnika  $T_S$ :

$$T = T_Q + T_S = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{P_Q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \tag{A.6.1.6}$$

Identičan izraz smo mogli dobiti i upotrebom Littleve teoreme i izraza (A.6.1.5) za srednji broj korisnika u sistemu  $N$ .

## A.6.2. Burkeova teorema

Burkeova teorema dokazuje da za M/M/m sistem važi više interesantnih tvrdnji, od kojih ovde bez dokaza navodimo sledeću:

***Tok odlazaka korisnika je Poissonov sa protokom  $\lambda$ .***

Treba imati u vidu da vreme između dva odlaska zavisi od toga da li je u trenutku odlaska sistem ostao prazan ili nije. Ako sistem nije ostao prazan, onda je vreme do sledećeg odlaska jednako vremenu posluživanja. Međutim, ako je sistem ostao prazan, onda vreme do sledećeg odlaska je jednako zbiru vremena posluživanja narednog korisnika i vremena za koje je sistem ostao prazan. Zbog toga protok napuštanja korisnika nije  $\mu$ , već  $\lambda$ . A to je u skladu i sa principom konzervacije protoka.

Takođe treba imati u vidu da tok odlazaka korisnika, iako Poissonov sa parametrom  $\lambda$ , nije identičan toku dolazaka korisnika. Najznačajnija razlika je u tome što su vremena međuodlazaka korelisana sa vremenima obrade, što nije slučaj kod tokova dolazaka.

### A.6.3. Gustina raspodele vremena čekanja u čekaonici

U ovoj sekciji određujemo raspodelu vremena  $t_Q$  koje korisnik provede u čekaonici sistema M/M/m, tj. vremena koje protekne od trenutka dolaska korisnika u sistem do trenutka odlaska u radionicu. Pri našem razmatranju pretpostavljamo da je disciplina čekanja tip FCFS (*First Come First Served*).

Posmatrajmo prvo vreme čekanja  $t_Q(n)$  'novog' korisnika koji u trenutku dolaska u sistem zatekne  $n$  'starih' korisnika. Ako je  $n < m$ , onda je očigledno da će 'novi' korisnik otići u radionicu bez zadržavanja u čekaonici. Drugim rečima  $t_Q(n < m) = 0$ , a verovatnoća da se to dogodi iznosi  $\sum_{n=0}^{m-1} q_n$ , gde je  $q_n$  verovatnoća da u sistemu ima  $n$  zatečenih korisnika (kod M/M/m sistema važi osobina PASTA pa je  $q_n = p_n$ ). Ako je  $n \geq m$ , 'novi' korisnik čeka (saglasno disciplini FCFS) da obradu završi jedan od korisnika koji se nalazi u radionici, a zatim i preostalih  $n-m$  korisnika koji se nalaze u čekaonici. Vremena obrade ovih korisnika su međusobno nezavisna i imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom  $m\mu$ , tako da je vreme čekanja 'novog' korisnika slučajna promenljiva sa Erlangijanom raspodelom koja glasi:

$$w_{t_Q(n)}(x) = \mu m \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu m x} \quad (\text{A.6.3.1})$$

Odgovarajuća kumulativna verovatnoća ima oblik :

$$Q_{t_Q(n)}(t) = \Pr\{t_Q(n) < t\} = \int_0^t \mu m \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu m x} dx \quad (\text{A.6.3.2})$$

Kumulativna verovatnoća vremena čekanja, koja je nezavisna od broja zatečenih korisnika, očigledno će biti:

$$Q_{t_Q}(t) = \Pr\{t_Q(n) = 0\} + \sum_{n=m}^{\infty} \Pr\{t_Q(n) < t\} q_n = \sum_{n=0}^{m-1} q_n + \sum_{n=m}^{\infty} q_n \int_0^t \mu m \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu m x} dx \quad (\text{A.6.3.3})$$

Za M/M/m sistem važi PASTA osobina pa stoga imamo:

$$q_n = p_n = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, & n < m \\ p_0 \rho^n \frac{m^m}{m!}, & n \geq m \end{cases}$$

$$q_0 = p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

$$\rho \triangleq \frac{\lambda}{m\mu} \quad (\text{A.6.3.4})$$

Smenom u (A.6.3.3) i posle sledećeg izvođenja, nalazimo:

$$\begin{aligned}
Q_{t_Q}(t) &= \sum_{n=0}^{m-1} p_n + \sum_{n=m}^{\infty} p_0 \rho^n \frac{m^m}{m!} \int_0^t \mu m \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu m x} dx \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} p_0 \rho^n \frac{m^m}{m!} \int_0^t \mu m \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu m x} dx = \int_0^t \mu m e^{-\mu m x} p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} \rho^n dx = \\
&= \int_0^t \mu m e^{-\mu m x} p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\mu m x)^{n-m}}{(n-m)!} \rho^{n-m} dx = \\
&= \int_0^t \mu m e^{-\mu m x} p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu m x)^n}{n!} \rho^n dx = \\
&\left( \text{primena Taylorovog razvoja } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \right) \\
&= \int_0^t \mu m e^{-\mu m x} p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} e^{\mu m x \rho} dx = \int_0^t \mu m e^{-\mu m x(1-\rho)} p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} dx = \\
&= \mu m p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \int_0^t e^{-\mu m x(1-\rho)} dx = \mu m p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{\mu m(1-\rho)} (1 - e^{-\mu m(1-\rho)t}) = \\
&= p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{(1-\rho)} (1 - e^{-\mu m(1-\rho)t}) = P_Q (1 - e^{-\mu m(1-\rho)t}) \\
\Rightarrow Q_{t_Q}(t) &= \sum_{n=0}^{m-1} p_n + P_Q (1 - e^{-\mu m(1-\rho)t}) \\
\Rightarrow Q_{t_Q}(t) &= \sum_{n=0}^{m-1} p_n + P_Q - P_Q e^{-\mu m(1-\rho)t} = \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} p_n + \sum_{n=m}^{\infty} p_n - P_Q e^{-\mu m(1-\rho)t} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n - P_Q e^{-\mu m(1-\rho)t} = 1 - P_Q e^{-\mu m(1-\rho)t} \\
\Rightarrow Q_{t_Q}(t) &= 1 - P_Q e^{-\mu m(1-\rho)t} \quad t \geq 0 \\
Q_{t_Q}(t) &= 0 \quad t < 0
\end{aligned} \tag{A.6.3.5}$$

Odavde dalje sledi:

$$w_{t_Q}(t) = \frac{dQ_{t_Q}(t)}{dt} = [1 - P_Q] \delta(t) + \mu m P_Q (1 - \rho) e^{-\mu m(1-\rho)t} \tag{A.6.3.6}$$

što predstavlja traženu raspodelu.

Ako nas interesuje raspodela vremena zadržavanja u celokupnom servisnom sistemu ona se dobija na sledeći način. Vreme zadržavanja korisnika u radionici je u stvari vreme obrade korisnika, a ono ima eksponencijalnu raspodelu:

$$w_{ts}(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \tag{A.6.3.7}$$

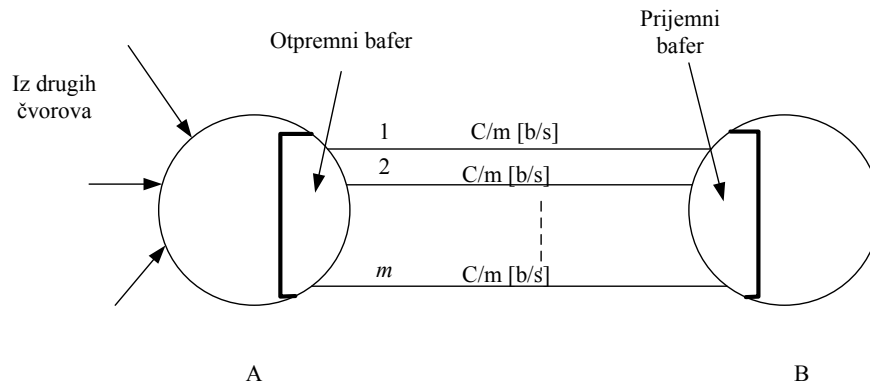
Vreme zadržavanja korisnika u servisnom sistemu je slučajna promenljiva koja predstavlja zbir slučajne promenljive koja predstavlja vreme čekanja korisnika u čekaonici  $t_Q$  i slučajne promenljive koja predstavlja vreme obrade korisnika u radionici  $t_S$ . Gustina raspodele

slučajne promenjive koja predstavlja vreme zadržavanja korisnika u sistemu je onda konvolucija gustina raspodela  $w_{t_Q}(t)$  i  $w_{t_S}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 w_{\tau}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{t_Q}(u) \cdot w_{t_S}(t-u) du = \\
 &= \int_0^t [1 - P_Q] \delta(u) \mu e^{-\mu(t-u)} du + \int_0^t \mu m P_Q (1 - \rho) e^{-\mu m(1-\rho)u} \mu e^{-\mu(t-u)} du = \\
 &= \mu [1 - P_Q] e^{-\mu t} + \mu^2 m P_Q (1 - \rho) \int_0^t e^{-\mu[m(1-\rho)-1]u} e^{-\mu t} du = \\
 &= \mu [1 - P_Q] e^{-\mu t} + \mu^2 m P_Q (1 - \rho) e^{-\mu t} \frac{1}{\mu [1 - m(1 - \rho)]} (e^{-\mu[m(1-\rho)-1]t} - 1) = \tag{A.6.3.8} \\
 &= \mu [1 - P_Q] e^{-\mu t} + \frac{\mu m P_Q (1 - \rho)}{[1 - m(1 - \rho)]} (e^{-\mu m(1-\rho)t} - e^{-\mu t}) = \\
 &= \mu \left( 1 - \frac{P_Q}{[1 - m(1 - \rho)]} \right) e^{-\mu t} + \frac{\mu m P_Q (1 - \rho)}{[1 - m(1 - \rho)]} e^{-\mu m(1-\rho)t}
 \end{aligned}$$

#### A.6.4. Primeri primene

Jedan od primera primene je analiza prenosa jedinica podataka preko nekog linka između dva komunikaciona čvora pri čemu pretpostavljamo da su baferi dovoljno veliki da ne može da dođe do gubitaka. Pri tome, takođe pretpostavljamo da jedinice podataka pristižu kao Poissonov tok, a dužina jedinice podataka je u stvari količina posla koja treba da se obradi i pretpostavljamo da dužina jedinice podataka ima eksponencijalnu raspodelu. Veza između dva komunikaciona čvora je prikazana na slici A.6.4.1.

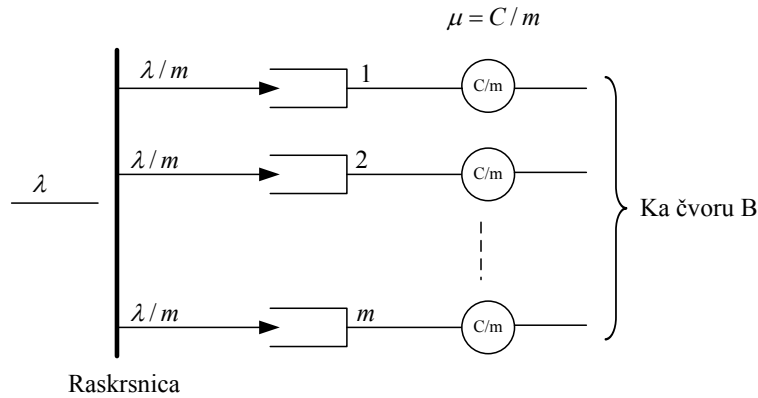


Slika A.6.4.1. Veza dva komunikaciona čvora

Ukupan kapacitet linkova između dva posmatrana komunikaciona čvora je  $C$  [b/s], a broj linkova je  $m$ , pri čemu su svi istih kapaciteta. Tada za analizu ovog sistema u zavisnosti od multipleksiranja jedinica podataka koristimo jedno od sledeća dva modelovanja posmatranog sistema:

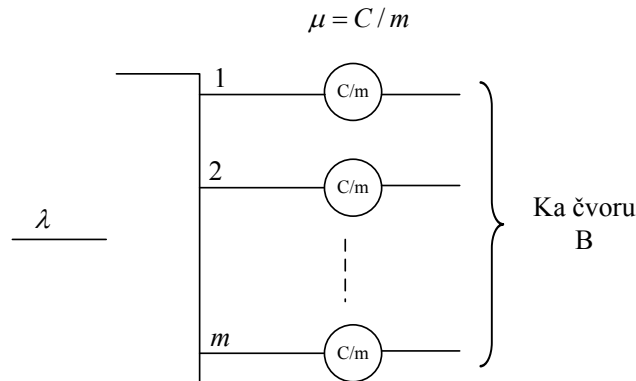
- **Sistematsko multipleksiranje** – Model se sastoji od  $m$  M/M/1 sistema
- **Statističko multipleksiranje** – Model se sastoji od jednog M/M/m sistema

Za slučaj sistematskog multipleksiranja svaki link ima svoj bafer u koji se smeštaju korisnici tj. jedinice podataka. Jedinice podataka koje treba da se proslede prema komunikacionom čvoru B se prosleđuju na neki od  $m$  linkova sa podjednakom verovatnoćom koja iznosi  $1/m$ . Tako da je protok podataka ka svakom linku  $\lambda/m$ , gde je  $\lambda$  protok podataka ka komunikacionom čvoru B. Moć serviseru tj. linka je  $C/m$ . Tako da ovde imamo  $m$  M/M/1 sistema. Ovaj slučaj je prikazan na slici A.6.4.2.



**Slika A.6.4.2. Sistematsko multipleksiranja**

Kod statističkog multipleksiranja imamo jedan zajednički red čekanja za svih  $m$  linkova tako da čim jedan link postane slobodan jedinica podataka se prosleđuje ka njemu. Ovde je protok podataka u sistem  $\lambda$ , a moć serviseru je i dalje  $C/m$ . Tako da ovde sistem modelujemo sa M/M/m sistemom što je prikazano na slici A.6.4.3. Ono što analiza pokazuje jeste da je slučaj statističkog multipleksiranja povoljniji sa stanovišta srednjeg zadržavanja u sistemu iz prostog razloga što se kod njega nikad ne može desiti da postoji korisnik koji čeka, a da pri tome postoji slobodan link, dok kod sistematskog multipleksiranja se to može desiti jer korisnik pošto je prosleđen na neki link ne može više da se prebaci na drugi slobodan link, već mora da čeka u redu za link na koji je raspoređen.



**Slika A.6.4.3. Statističko multipleksiranje**

Takođe se pokazuje da je bolje imati jedan link kapaciteta  $C$ , nego  $m$  linkova čiji će ukupni kapacitet biti takođe  $C$ , sa stanovišta srednjeg vremena zadržavanja korisnika u sistemu što će biti pokazano nešto kasnije u okviru ove sekcije.



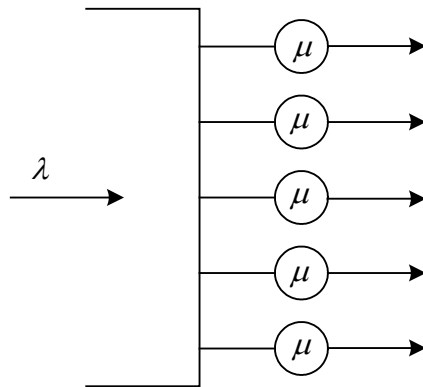
**Primer 1.** U jednoj pošti postoji 5 šaltera za rad sa korisnicima, pri tome korisnici dolaze u poštu Poissonovim tokom sa parametrom  $\lambda = 80$  kor./h. Radnice na šalteru vrše uslugu korisnika po eksponencijalnoj raspodeli pri čemu u proseku jedna radnica može da usluži 20 korisnika u jednom času. Koliko je srednje vreme čekanja korisnika da dođe na šalter ako:

- postoji jedan zajednički red čekanja za sve šaltere, pri čemu je disciplina čekanja FCFS.
- svaki šalter ima svoj red čekanja, pri čemu svi redovi čekanja imaju podjednaku verovatnoću da će korisnik stati u njih. Disciplina čekanja je takođe FCFS.

**Rešenje:**

Moć obrade jedne radnice na šalteru je  $\mu = 20$  kor./h.

- U ovom slučaju imamo M/M/5 sistem koji je prikazan na slici A.6.4.4.



Slika A.6.4.4. M/M/5 servisni sistem

Na osnovu formula (A.6.3) i (A.6.5) imamo:

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^4 \frac{(5\rho)^n}{n!} + \frac{(5\rho)^5}{5!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} = \frac{1}{77} \quad (\text{A.6.4.1})$$

$$\rho \triangleq \frac{\lambda}{5\mu} = \frac{4}{5}$$

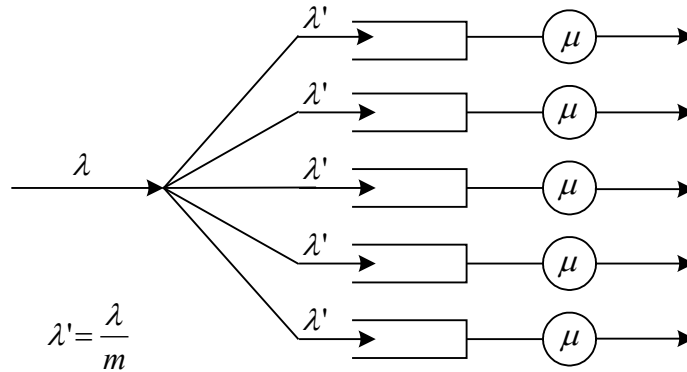
$$P_Q = \frac{5^5}{5!} \frac{\rho^5}{1-\rho} p_0 = \frac{128}{231} \quad (\text{A.6.4.2})$$

gde su  $p_0$  verovatnoća da je sistem prazan, a  $P_Q$  verovatnoća čekanja korisnika.

Srednje vreme čekanja korisnika  $T_Q$  nalazimo na osnovu (A.6.1.4).

$$T_Q = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{P_Q}{\lambda} = 1.662 \text{ min.} \quad (\text{A.6.4.3})$$

- U ovom slučaju imamo 5 nezavisnih M/M/1 sistema pri čemu se protoci  $\lambda'$  u ove sisteme dobijaju na osnovu osobine razdvajanja Poissonovog toka pri čemu se razdvajanje korisnika vrši na osnovu podjednakih verovatnoća kao što je prikazano na slici A.6.4.5.



Slika A.6.4.5. Pet M/M/1 sistema

Pošto su svi šalteri (tj. njihovi redovi čekanja) podjednako verovatni sledi da je  $\lambda' = \lambda/m = 16 \text{ kor./h}$ .

Srednje vreme čekanja  $T_Q$  je:

$$T_Q = \sum_{i=1}^5 P_{Ri} \cdot T_{Qi}$$

$$P_{Ri} = 1/5, i = 1..5 \quad (\text{A.6.4.4})$$

$P_{Ri}$  je verovatnoća da će korisnik stati (biti raspoređen) da čeka kod šaltera  $i$ , a  $T_{Qi}$  je srednje vreme čekanja korisnika u redu za šalter  $i$ . Pošto su svih 5 M/M/1 sistema jednakih karakteristika onda je  $T_{Qi}$  isto za sve šaltere pa odatle zaključujemo na osnovu (A.6.4.4) da je  $T_{Qi} = T_Q$ .

Na osnovu formula (A.6.3) i (A.6.5) imamo za jedan M/M/1 sistem:

$$p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{5}$$

$$\rho \triangleq \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{4}{5} \quad (\text{A.6.4.5})$$

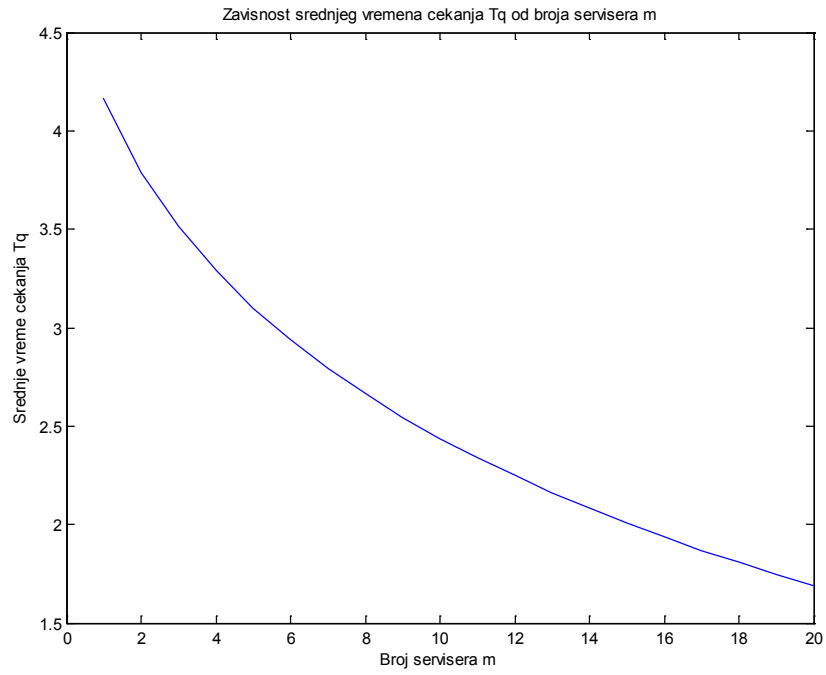
$$P_Q = \frac{\rho}{1 - \rho} p_0 = \frac{4}{5} \quad (\text{A.6.4.6})$$

Primenom formule (A.6.1.4) nalazimo:

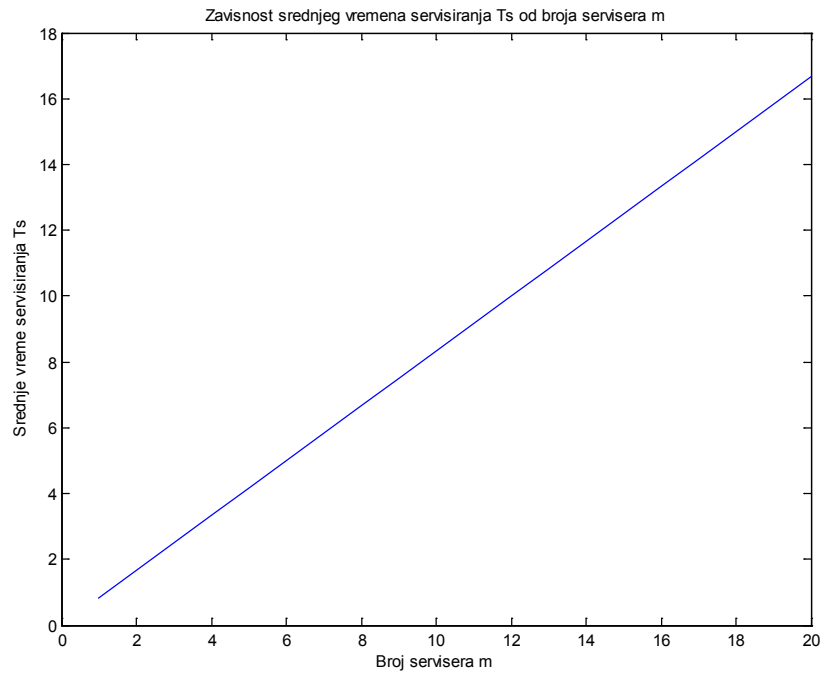
$$T_{Qi} = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{P_Q}{\lambda'} = 12 \text{ min.} \quad (\text{A.6.4.7})$$

i odatle zaključujemo da je srednje čekanje korisnika  $T_Q = 12 \text{ min}$ . Na osnovu ovog rezultata vidimo da je statističko multipleksiranje značajno bolje.

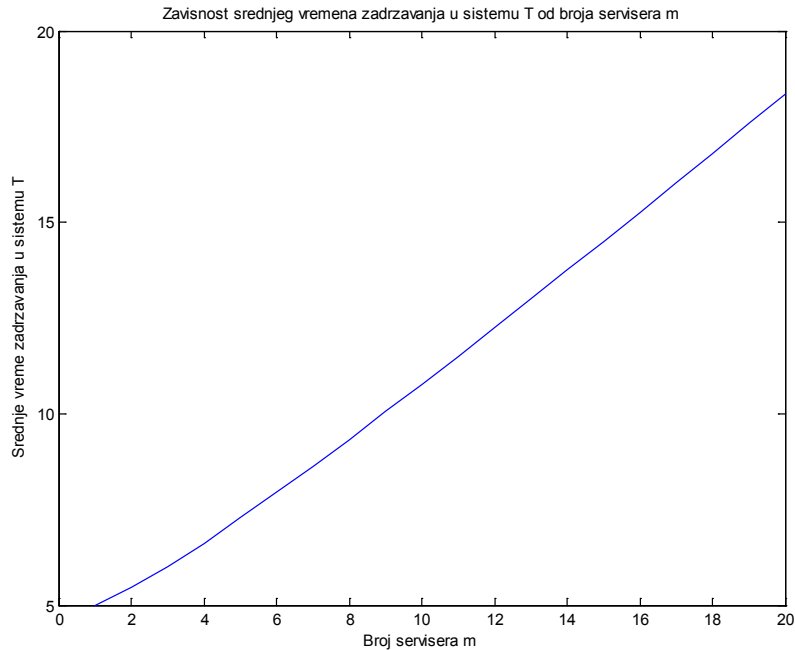
**Primer 2.** U ovom primeru ćemo generisati krive zavisnosti srednjih vremena čekanja, servisiranja i zadržavanja u sistemu od broja serviseru  $m$ , pri čemu je ukupna moć serviseru konstantna ( $m\mu = \text{const.}$ ). Za primer su uzete konkretne vrednosti  $\lambda = 1 \text{ kor./s}$ ,  $m\mu = 1.2 \text{ kor./s}$ , a broj serviseru  $m$  je uzet u rasponu od 1 do 20. Dobijeni grafici su predstavljeni na slikama A.6.4.6- A.6.4.8.



**Slika A.6.4.6. Zavisnost srednjeg vremena čekanja od broja serviseru**



**Slika A.6.4.7. Zavisnost srednjeg vremena servisiranja od broja serviseru**



**Slika A.6.4.8. Zavisnost srednjeg vremena zadržavanja u sistemu od broj serviseri**

Sa slike A.6.4.6 vidimo da je srednje vreme čekanja sve manje i manje kako je broj serviseri veći, međutim, pošto su serviseri pojedinačno sve manje moći kako je broj serviseri veći onda je srednje vreme obrade korisnika sve veće i veće (slika A.6.4.7). Kako srednje vreme obrade korisnika brže raste u zavisnosti od  $m$ , nego što srednje vreme čekanja opada onda ukupno srednje vreme zadržavanja u servisnom sistemu raste sa porastom  $m$ , kao što se i vidi sa slike A.6.4.8. Otuda konstatacija da je bolje imati jedan moćniji serviser, nego više serviseri iste ukupne moći sa stanovišta ukupnog zadržavanja u sistemu, jer iako se više čeka moćniji serviser to nadoknađuje brzinom obrade.

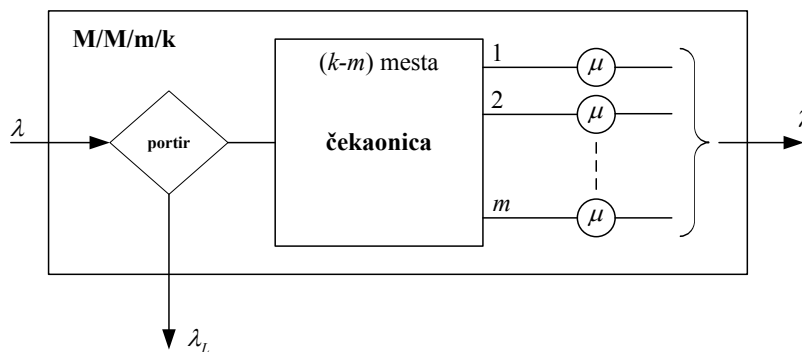
### **A.6.5. M/M/1 sistem**

M/M/1 sistem se u praksi veoma često koristi za modeliranje telekomunikacionih sistema ili njihovih delova, pa će u okviru ove sekcije biti dati izrazi za sve relevantne parametre M/M/1 sistema. Svi izrazi u ovoj sekciji su dobijeni iz opštih izraza za M/M/ $m$  datih prethodno u okviru ovog potpoglavlja, pri čemu je broj serviseri  $m$  podešen na vrednost 1.

$$\begin{aligned}
p_n &= \rho^n p_0, \quad n \geq 1 \\
\rho &= A = \frac{\lambda}{\mu} \\
p_0 &= 1 - \rho \\
P_Q &= 1 - p_0 = \rho \\
T_S &= \frac{1}{\mu}; N_S = A \\
T_Q &= \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\mu}; N_Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \\
T &= \frac{1}{\mu - \lambda}; N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\
w_{iQ}(t) &= (1 - \rho)\delta(t) + \mu\rho(1 - \rho)e^{-\mu(1 - \rho)t}, \quad t \geq 0 \\
w_{is}(t) &= \mu \cdot e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \\
w_\tau(t) &= \mu(1 - \rho)e^{-\mu(1 - \rho)t}, \quad t \geq 0
\end{aligned}
\tag{A.6.5.1}$$

## A.7. M/M/m/k sistemi

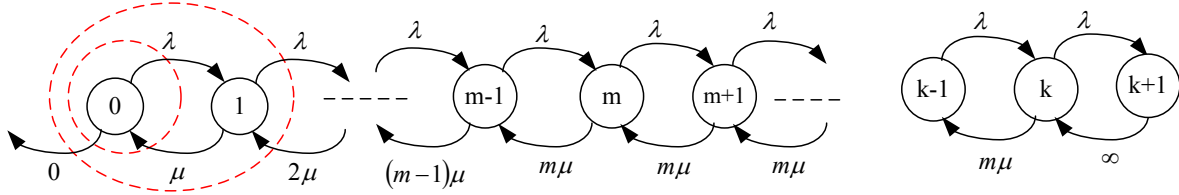
M/M/m/k sistemi takođe podrazumevaju Poissonov tok dolazaka u sistem sa parametrom  $\lambda$ , eksponencijalnu raspodelu vremena obrade korisnika sa parametrom  $\mu$ ,  $m$  serviseri i konačnu čekaonicu sa  $k - m$  mesta. Disciplina posluživanja je FCFS. Sistemi konačnog kapaciteta su po prirodi stabilni jer kod njih ne može doći do nagomilavanja beskonačnog broja korisnika, već je to regulisano kroz mehanizam odbijanja korisnika. M/M/m/k sistem je prikazan na slici A.7.1.



Slika A.7.1. M/M/m/k sistem

Dijagram toka za M/M/m/k sistem je prikazan na slici A.7.2 (na slici A.7.2 su obeležene konture za prve dve lokalne jednačine). Kod M/M/m/k sistema imamo usled konačnog kapaciteta sistema i gubitke korisnika koji čine tok izgubljenih korisnika protoka  $\lambda_L$ . Na ulazu u sistem se nalazi portir koji radi po principu ako ima mesta u sistemu korisnik se propušta, a ako nema mesta u sistemu onda se korisnik automatski (beskonačnom brzinom odbija). To je na dijagramu toka prikazano kao stanje  $k+1$  koje teoretski postoji kad korisnik dođe u pun sistem, ali pošto

portir radi beskonačnom brzinom praktično se sistem odmah vraća u stanje  $k$  tj. sistem se beskonačno kratko vreme zadržava u stanju  $k+1$ . Bitno je uočiti da u sistem korisnici dolaze po Poissonu, ali iza portira prema čekaonici tok više nije po Poissonu što se lako zaključuje iz osobine razdvajanja Poissonovog toka. Takođe ni tok izgubljenih korisnika nije Poissonov usled istog razloga.



Slika A.7.2. Dijagram toka za M/M/m/k sistem

Možemo da pišemo lokalne jednačine za ovaj sistem na osnovu dijagrama toka sa slike A.7.2.

$$\begin{aligned}
 \mu p_1 &= \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\
 2\mu p_2 &= \lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \\
 3\mu p_3 &= \lambda p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0 \\
 &\vdots \\
 m\mu p_m &= \lambda p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{\lambda^m}{m!\mu^m} p_0 \\
 m\mu p_{m+1} &= \lambda p_m \Rightarrow p_{m+1} = \frac{\lambda^{m+1}}{m \cdot m!\mu^{m+1}} p_0 \\
 &\vdots \\
 m\mu p_k &= \lambda p_{k-1} \Rightarrow p_k = \frac{\lambda^k}{m^{k-m} m!\mu^k} p_0 \\
 \infty p_{k+1} &= \lambda p_k \Rightarrow p_{k+1} = 0
 \end{aligned} \tag{A.7.1}$$

Na osnovu (A.7.1) možemo pisati opšti izraz:

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \leq n < m \\
 p_n &= \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{A^n}{m^{n-m} m!} p_0, \quad m \leq n \leq k \\
 \rho &= \frac{\lambda}{m\mu} \\
 A &= \frac{\lambda}{\mu}
 \end{aligned} \tag{A.7.2}$$

Parametri  $\rho$  i  $A$  imaju isto značenje kao i kod M/M/m sistema.

Pošto zbir svih verovatnoća stanja sistema mora biti jedan (sistem je uvek u nekom od stanja) nalazimo verovatnoću da je sistem prazan  $p_0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k p_n = 1 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} p_0 + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^k \rho^n p_0 = 1 \\ \Rightarrow p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^k \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1-\rho^k}{1-\rho}} \end{aligned} \quad (\text{A.7.3})$$

Verovatnoća blokade  $P_B$  je verovatnoća da se sistem nalazi u stanju  $k$  (sistem je pun) i po definiciji je  $P_B$ :

$$P_B = p_k = \frac{m^m \rho^k}{m!} p_0 = \frac{m^m \rho^k}{m!} \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1-\rho^k}{1-\rho}} \quad (\text{A.7.4})$$

Verovatnoća izgubljenog korisnika  $P_L$  se definiše kao verovatnoća da korisnik po ulasku u sistem zatekne da je sistem pun i po definiciji je  $P_L$ :

$$P_L = q_k \quad (\text{A.7.5})$$

Pošto za M/M/m/k sistem važi osobina PASTA onda je:

$$q_k = p_k \Rightarrow P_L = P_B \quad (\text{A.7.6})$$

Protok izgubljenih korisnika  $\lambda_L$  je:

$$\lambda_L = P_L \lambda \quad (\text{A.7.7})$$

Pošto za celokupan sistem važi zakon konzervacije protoka onda je  $\gamma$  protok korisnika na izlazu sistema:

$$\gamma = \lambda - \lambda_L = (1 - P_L) \lambda \quad (\text{A.7.8})$$

Ponuđeni saobraćaj je saobraćaj koji korisnici nude servisnom sistemu, ali pošto je ovo sistem sa gubicima sav saobraćaj koji je ponuđen se ne ostvaruje, već samo deo. Zato se definiše veličina  $A_S$  koja predstavlja ostvareni saobraćaj i definiše se kao:

$$A_S = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} (1 - P_L) = A(1 - P_L) \quad (\text{A.7.9})$$

Dalje ćemo posmatrati specijalan slučaj, a to je sistem M/M/m/m (sistem bez čekaonice). Sistem M/M/m/m se u literaturi naziva i Erlangov model. Erlangov model je naročito korišćen u okviru klasične telefonije za modelovanje telefonskog saobraćaja. Za verovatnoće stanja ovog sistema imamo formulu na osnovu (A.7.2):

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \leq n \leq m \\
\rho &= \frac{\lambda}{m\mu} \\
A &= \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned} \tag{A.7.10}$$

Verovatnoća da je sistem prazan  $p_0$  je na osnovu (A.7.3):

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^m \frac{A^n}{n!}} \tag{A.7.11}$$

Formula za verovatnoće stanja  $p_n$  sistema M/M/m/m se još naziva i Erlangova raspodela I reda:  $E_1(n, m, A)$ ,  $n = 0, 1, \dots, m$ .

Verovatnoća blokade je sada:

$$P_B = p_m = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{n=0}^m \frac{A^n}{n!}} \tag{A.7.12}$$

Formula (A.7.12) se naziva Erlangova B formula. Za ovu formulu postoji i iterativna verzija formule:

$$\begin{aligned}
E_1(m, m, A) &\equiv E_1(m, A) \\
E_1(m, A) &= \frac{AE_1(m-1, A)}{m + AE_1(m-1, A)} \\
E_1(0, A) &= 1
\end{aligned} \tag{A.7.13}$$

Za protok korisnika na izlazu iz sistema  $\gamma$  po definiciji imamo da je:

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n p_n = \sum_{n=0}^m n\mu p_n = \mu \sum_{n=0}^m np_n = \mu N_S \tag{A.7.14}$$

$N_S$  je srednji broj korisnika u radionici tj. srednji broj angažovanih servisera. Za ostvareni saobraćaj  $A_S$  imamo da je:

$$A_S = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\mu N_S}{\mu} = N_S \tag{A.7.15}$$

Srednje vreme servisiranja  $T_S$  je  $1/\mu$  jer je obrada korisnika po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom  $\mu$ . Pošto sistem nema čekaonicu onda je srednji broj korisnika u čekaonici nula, a isto važi i za srednje vreme čekanja korisnika (korisnik ili odmah ulazi u radionicu ili biva odbijen):

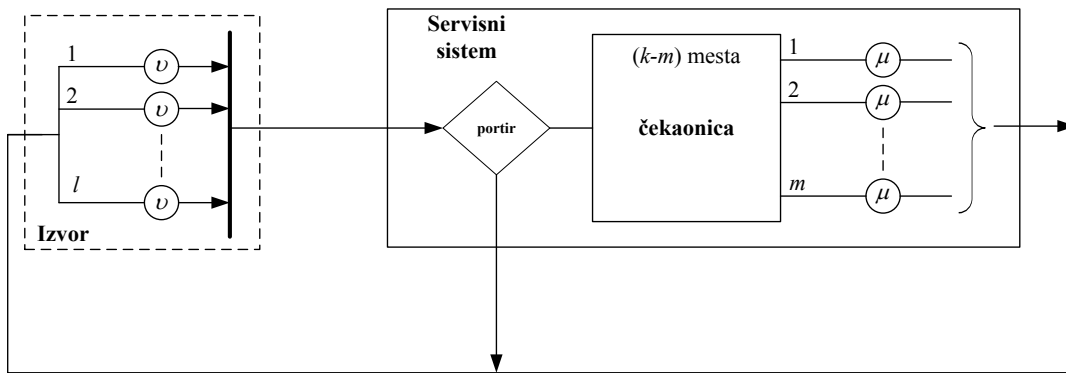


$$\begin{aligned}
N_Q &= 0 \\
T_Q &= 0 \\
T_S &= \frac{1}{\mu} \\
N_S &= \gamma T_S = \lambda(1 - P_L) / \mu = A(1 - P_L)
\end{aligned}
\tag{A.7.16}$$

gde smo za  $N_S$  upotreбили Littlovu formulu. Očigledno je da je  $N = N_S$  i  $T = T_S$ .

## A.8. M/M/m/k/l sistemi

Ovaj model takođe podrazumeva Poissonov tok dolazaka u sistem sa parametrom  $\lambda$ , eksponencijalnu raspodelu vremena obrade korisnika sa parametrom  $\mu$ ,  $m$  servisera, konačnu čekaonicu sa  $k - m$  mesta i disciplinu posluživanja FCFS. Jedina razlika u odnosu na M/M/m/k sistem je da je broj potencijalnih korisnika konačan i iznosi  $l$ . Sistem M/M/m/k/l je prikazan na slici A.8.1.



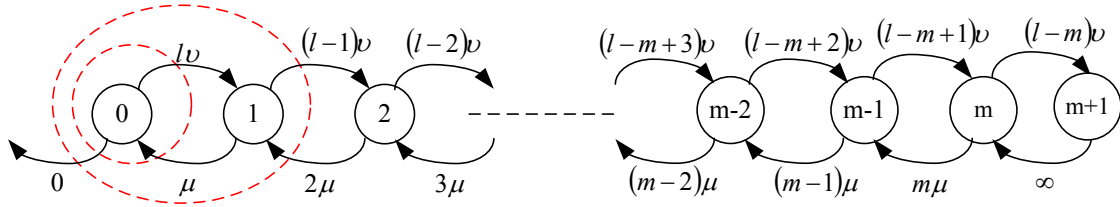
Slika A.8.1 M/M/m/k/l sistem

Po ovom modelu vreme zadržavanja korisnika u izvoru je slučajna promenjiva koja ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom  $\nu$ . U zavisnosti od odnosa između parametara  $m$ ,  $k$  i  $l$  imamo sledeće slučajeve:

- $1 \leq l \leq m$ , u ovom slučaju imamo sistem u kom nema odbijenih korisnika i u kom nema čekanja na servis
- $m < l \leq k$ , u ovom sistemu nema odbijenih korisnika, ali se može desiti da korisnici moraju da čekaju
- $l > k$ , u ovom sistemu može doći do odbijanja korisnika

U nastavku ćemo posmatrati specijalan slučaj M/M/m/m/l koji predstavlja Engsetov model (pretpostavljeno je da je  $l \geq m$ ). Bitna napomena je da za ovaj sistem ne važi osobina PASTA. Ukoliko je  $l \gg m$  onda se ovaj sistem može aproksimirati Erlangovim modelom M/M/m/m.

Dijagram toka za Engsetov model je dat na slici A.8.2 (obeležene su konture sa prve dve lokalne jednačine).



Slika A.8.2 Dijagram toka za M/M/m/m/1 sistem

Na osnovu dijagrama toka sa slike A.8.2 možemo da pišemo lokalne jednačine:

$$\begin{aligned}
 \mu p_1 &= l v p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{l v}{\mu} p_0 = \binom{l}{1} r p_0 \\
 2 \mu p_2 &= (l-1) v p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{(l-1) v}{2 \mu} p_1 = \frac{l(l-1) v^2}{2 \mu^2} p_0 = \binom{l}{2} r^2 p_0 \\
 3 \mu p_3 &= (l-2) v p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{(l-2) v}{3 \mu} p_2 = \frac{l(l-1)(l-2) v^3}{3! \mu^3} p_0 = \binom{l}{3} r^3 p_0 \\
 &\vdots \\
 m \mu p_m &= (l-m+1) v p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{l(l-1) \cdots (l-m+1) v^m}{m! \mu^m} p_0 = \binom{l}{m} r^m p_0 \\
 \infty p_{m+1} &= (l-m) v p_m \Rightarrow p_{m+1} = 0 \\
 r &= \frac{v}{\mu}
 \end{aligned} \tag{A.8.1}$$

Na osnovu (A.8.1) možemo napisati opšti izraz za verovatnoće stanja  $p_n$ :

$$p_n = \binom{l}{n} r^n p_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \tag{A.8.2}$$

Pošto zbir svih verovatnoća stanja sistema mora biti jedan (sistem je uvek u nekom od stanja) nalazimo verovatnoću da je sistem prazan  $p_0$ :

$$\sum_{n=0}^m p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^m \binom{l}{n} r^n p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^m \binom{l}{n} r^n} \tag{A.8.3}$$

Na osnovu (A.8.2) i (A.8.3) imamo da su verovatnoće stanja  $p_n$  predstavljene formulom:

$$p_n = \frac{\binom{l}{n} r^n}{\sum_{i=0}^m \binom{l}{i} r^i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \tag{A.8.4}$$

Formula (A.8.4) predstavlja Engsetovu raspodelu.

Za verovatnoće stanja sistema koja zatekne korisnik po ulasku u sistem  $q_n$  imamo:

$$q_n = \frac{\lambda_n p_n}{\sum_{i=0}^m \lambda_i p_i} = \frac{(l-n)\nu \frac{\binom{l}{n} r^n}{\sum_{j=0}^m \binom{l}{j} r^j}}{\sum_{i=0}^m (l-i)\nu \frac{\binom{l}{i} r^i}{\sum_{j=0}^m \binom{l}{j} r^j}} = \frac{\binom{l-1}{n} r^n}{\sum_{i=0}^m \binom{l-1}{i} r^i} = p_n(l-1) \quad (\text{A.8.5})$$

$$\lambda_n = (l-n)\nu$$

Na osnovu (A.8.5) imamo da je  $q_n(l) = p_n(l-1)$ , pa vidimo da u ovom sistemu osobina PASTA ne važi.

Za intezitet ponuđenog saobraćaja  $A$  imamo po definiciji:

$$A = \frac{E\{\lambda_n\}}{\mu} = \frac{\sum_{i=0}^m \lambda_i p_i}{\mu} = r \frac{\sum_{i=0}^m \binom{l-1}{i} r^i}{\sum_{j=0}^m \binom{l}{j} r^j} \quad (\text{A.8.6})$$

Za intezitet ostvarenog saobraćaja  $A_S$  imamo na osnovu izraza (A.7.14) i (A.7.15):

$$A_S = N_S = E\{i\} = \sum_{i=0}^m i p_i = \sum_{i=0}^m i p_0 \binom{l}{i} r^i = \frac{l}{\sum_{j=0}^m \binom{l}{j} r^j} \sum_{i=1}^m \binom{l-1}{i-1} r^i \quad (\text{A.8.7})$$

Verovatnoća blokade  $P_B$  je:

$$P_B = p_m = \frac{\binom{l}{m} r^m}{\sum_{i=0}^m \binom{l}{i} r^i} \quad (\text{A.8.8})$$

Verovatnoća gubitka korisnika  $P_L$  je:

$$P_L = q_m = \frac{\binom{l-1}{m} r^m}{\sum_{i=0}^m \binom{l-1}{i} r^i} = \frac{A - A_S}{A} \quad (\text{A.8.9})$$

Napomenimo da i dalje važi relacija  $A_S = A(1 - P_L)$ , kao što se uostalom vidi iz (A.8.9). Takođe, pošto u Engsetovom modelu nema čekaonice, srednje vreme čekanja  $T_Q$ , kao i srednji

broj korisnika u čekaonici  $N_Q$  su jednaki nuli. Očigledno, i u Engsetovom modelu važi da je  $N = N_S$  i  $T = T_S$ , pri čemu za  $T_S$  i  $N_S$  važe izrazi dati u (A.7.16).

## A.9. M/G/1 sistemi

Model M/G/1 predstavlja sistem sa čekaonicom beskonačnog kapaciteta i sa radionicom koja ima jednog serviseru. Korisnici dolaze u sistem formirajući Poissonov tok sa protokom  $\lambda$ , a vreme obrade korisnika je slučajna veličina proizvoljne (generalne) raspodele i srednjom vrednosti  $1/\mu$ . Tok dolazaka nezavisan je od vremena posluživanja. Takođe, vremena posluživanja različitih korisnika su međusobno nezavisni procesi. Disciplina posluživanja je FCFS. Ovaj model je veoma često korišćen u praksi za modeliranje telekomunikacionih sistema.

Analiza modela M/G/1 je veoma složena. Zbog toga ćemo posmatrati samo najvažnije veličine koje određuju performanse sistema. U ovom slučaju to su srednji broj korisnika u sistemu  $N$  i srednje vreme zadržavanja korisnika u sistemu  $T$ . Postupak je sledeći:

- koristeći Pollaczek-Khinchinovu formulu prvo računamo srednje vreme čekanja  $T_Q$ ;
- vreme zadržavanja korisnika u sistemu jednako je zbiru vremena čekanja i vremena servisiranja, tj.:  $T = T_Q + T_S = T_Q + 1/\mu$ ;
- koristeći Littleovu formulu računamo srednji broj korisnika u sistemu  $N = \lambda \cdot T$ ;
- srednji broj korisnika u sistemu možemo da odredimo i koristeći formulu  $N = N_Q + N_S$  pri čemu je  $N_Q = \lambda \cdot T_Q$  i  $N_S = \lambda \cdot T_S = \lambda/\mu = \rho$ .

Kao što ćemo pokazati u sekciji koja se odnosi na Pollaczek-Khinchinovu formulu, za određivanje vremena čekanja potrebno je da poznamo pored srednje vrednosti i drugi moment (ili varijansu) vremena posluživanja.

### A.9.1. Pollaczek-Khinchinova (P-K) formula

Posmatrajmo M/G/1 model servisnog sistema. Pollaczek i Khinchin su pokazali da važi formula:

$$T_Q = \frac{\lambda \overline{\tau^2}}{2(1-\rho)}; \quad \rho = \lambda \overline{\tau} \quad (\text{A.9.1.1})$$

gde je  $T_Q$  prosečno vreme zadržavanja korisnika u čekaonici,  $\overline{\tau}$  i  $\overline{\tau^2}$  su srednja vrednost i srednja kvadratna vrednost vremena posluživanja korisnika, a  $\lambda$  je protok dolazaka korisnika u sistem. Podrazumeva se da je sistem stabilan i da vredi disciplina čekanja FCFS ("ko prvi dođe prvi je poslužen"). Napomenimo da za ovaj sistem važe sledeće dve osobine: (i) konzervacija protoka ( $\lambda = \gamma$ ) tj. korisnici napuštaju sistem sa istim protokom sa kojim i dolaze u sistemu (ii) PASTA (tj.  $q_n = p_n$ ).

P-K formula može se izvesti na različite načine. Način koji ćemo ovde prikazati sastoji se iz dva "koraka". U prvom koraku određujemo  $T_Q$  u funkciji srednjeg rezidualnog vremena posluživanja  $T_R$ . To je prosečno preostalo vreme posluživanja (obrade) korisnika koji se već nalazi u radionici, a koju "novi" korisnik "vidi" pri dolasku u čekaonicu sistema. Ako sa  $N_Q$

označimo prosečan broj korisnika koji pri tome naš “novi” korisnik zatiče u čekaonici, onda možemo da pišemo:

$$T_Q = T_R + N_Q T_S \quad (\text{A.9.1.2})$$

pri čemu  $T_S = \bar{\tau}$  označava prosečno vreme posluživanja korisnika. Imajući u vidu da vredi Littlova formula:

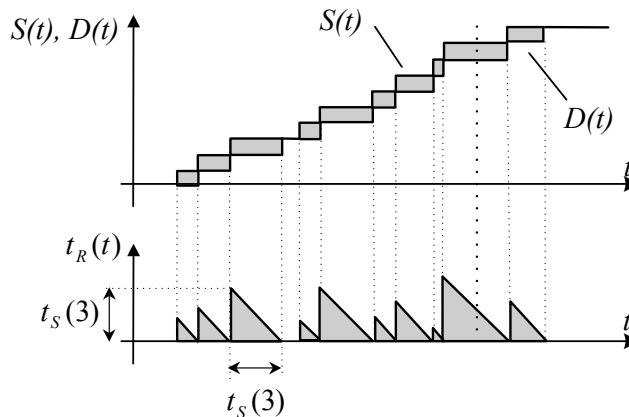
$$N_Q = \lambda T_Q \quad (\text{A.9.1.3})$$

u izrazu (A.9.1.2) možemo da eliminišemo  $N_Q$ , a zatim nalazimo:

$$T_Q = \frac{T_R}{1-\rho}; \quad \rho = \lambda T_S = \lambda \bar{\tau} \quad (\text{A.9.1.4})$$

Dobijeni izraz predstavlja rezultat koji smo nameravali da dobijemo u prvom koraku izvođenja P-K formule.

U drugom delu dokazivanja P-K formule potrebno je da izrazimo  $T_R$  preko veličina koje karakterišu M/G/1 model. Da bi to postigli, posmatrajmo prvo dijagrame na slici A.9.1.1. U gornjem delu dijagrama prikazani su brojački proces odlazaka korisnika iz čekaonice u radionicu sistema  $S(t)$  i brojački proces odlazaka korisnika iz radionice  $D(t)$ . U donjem delu dijagrama prikazana je trenutna vrednost preostalog vremena posluživanja  $t_R(t)$ . Vidimo da je to funkcija koja se sastoji od pravouglanih jednakokrakih trouglova čije katete su jednake vremenu servisiranja  $t_S(i)$ , pri čemu  $i$  označava redni broj korisnika.



Slika A.9.1.1. Proces koji karakterišu M/G/1 model.

Pretpostavljamo da važi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} = \lambda = \gamma \quad (\text{A.9.1.5})$$

Takođe, pretpostavljamo da je  $t_R(t)$  ergodičan proces, tako da možemo da pišemo:

$$T_R = \overline{t_R(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t t_R(u) du \quad (\text{A.9.1.6})$$

Množenjem i deljenjem sa  $D(t)$  i imajući u vidu (A.9.1.5) takođe možemo da pišemo:

$$T_R = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{D(t)} \int_0^t t_R(u) du \quad (\text{A.9.1.7})$$

Pošto određeni integral geometrijski predstavlja površinu omeđenu apscisom i podintegralnom funkcijom, na osnovu donjeg dijagrama na slici A.9.1.1, vredi:

$$\frac{1}{D(t)} \int_0^t t_R(u) du = \frac{1}{2D(t)} \left\{ \sum_{i=1}^{D(t)} t_S^2(i) + t_S(S(t)) \tilde{t}_S(S(t)) \right\} \quad (\text{A.9.1.8})$$

gde je sa  $\tilde{t}_S(i)$  označen deo vremena  $t_S(i)$ . Vidimo da pri uslovu  $t \rightarrow \infty$  izraz (A.9.1.8) postaje polovina srednje kvadratne vrednosti vremena servisiranja, tako da dobijamo:

$$T_R = \frac{\lambda}{2} \overline{\tau^2} \quad (\text{A.9.1.9})$$

čime je završen drugi korak izvođenja. Pošto (A.9.1.9) u vrstimo u (A.9.1.4) dobijamo P-K formulu (A.9.1.1).

### A.9.2. Komparacija M/M/1 i M/D/1 sistema

Koristeći dobijene formule za M/G/1 sistem, možemo da uporedimo M/M/1 i M/D/1 sisteme sa jednakim srednjim vremenom posluživanja  $T_S = 1/\mu$ .

U slučaju M/M/1 sistema vreme posluživanja ima eksponencijalnu raspodelu. U (A.6.5.1) je dat i izraz za ukupno zadržavanje korisnika u sistemu  $T = 1/(\mu - \lambda)$ . Identičan izraz smo mogli dobiti i zbirom srednjeg vremena posluživanja i srednjeg vremena čekanja dobijenog primenom P-K formule. Pri tome, za eksponencijalnu raspodelu važi da je  $\overline{\tau^2} = 2/\mu^2$ .

U slučaju M/D/1 sistema vreme posluživanja je konstantno. Varijansa vremena posluživanja jednaka je nuli, pa je  $\overline{\tau^2} = \overline{\tau}^2 = 1/\mu^2$ . Primenom P-K formule za određivanje srednjeg vremena čekanja, a potom sabiranja srednjih vremena čekanja i posluživanja, dobijamo ukupno vreme zadržavanja korisnika u sistemu:  $T = (1 - \rho/2)/(\mu - \lambda)$ , pri čemu je  $\rho = \lambda/\mu$ .

Vidimo da je, pri jednakoj srednjoj vrednosti, zadržavanje u M/D/1 sistemu manje od zadržavanja u M/M/1 sistemu. To je logičan rezultat, ako se ima u vidu da zadržavanje zavisi od varijanse vremena posluživanja. Zapravo, M/D/1 sistem ima najmanje moguće zadržavanje korisnika. Sa druge strane mnogi realni procesi imaju varijansu manju od procesa sa eksponencijalnom raspodelom. U tim slučajevima, primenom modela M/M/1 dobija se procena gornje granice vremena zadržavanja u sistemu, a primenom M/D/1 modela, očigledno, dobija se procena donje granice vremena zadržavanja u sistemu.