



**BENEFIT**

Boosting the telecommunications  
engineer profile to meet modern  
society and industry needs

# Sistemi sa više brzina (13M031SVB)

## Deo 1

Master studije

Jelena Čertić, Katedra za Telekomunikacije,  
Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



# Opšte informacije

- Predavanja: dr Jelena Čertić, vanredni profesor
- Vežbe: dr Miloš Bjelić, asistent
  
- Formiranje ocene: projekat (70 %) i usmeni ispit (30%)
  
- [https://www.etf.bg.ac.rs/fis/karton\\_predmeta/13M031SVB-2013](https://www.etf.bg.ac.rs/fis/karton_predmeta/13M031SVB-2013)
- <http://telit.etf.rs/kurs/sistemi-sa-vise-brzina/>

# Literatura

- Lj. Milić, *Multirate Filtering for Digital Signal Processing: MATLAB Applications*, IGI Global, 2009.
- G. Dolecek, *Multirate Systems, Design and Application*, Idea Group Publishing, 2002.
- N. J. Fliege, *Multirate Digital Signal Processing: Multirate Systems - Filter Banks - Wavelets*, Wiley, 2000.
- Ljiljana Milić, Jelena Čertić i Irena Janković, *Solution Manual to accompany Multirate Filtering for Digital Signal Processing: MATLAB Applications*, [Online]. [http://home.etf.rs/~milic/Solution\\_Manual/index.html](http://home.etf.rs/~milic/Solution_Manual/index.html)

# Sadržaj kursa

- Osnove sistema sa više brzina, downsampling, upsampling, decimation, interpolation
- Filtri u sistemima sa više brzina (FIR i IIR)
- Promena frekvencije odabiranja sa racionalin i sa proizvoljnim faktorom
- Tehnike obrade signala sa više brzina u projektovanju filtara
- Filtarske banke (banke sa savršenom i sa približno savršenom rekonstrukcijom)
- Sistemi sa više brzina u telekomunikacionim i audio sistemima

# Analogno-digitalna konverzija

- *Nyquist*-ovo odabiranje

$$f_{\text{sampling}} \geq 2f_{\text{max}}$$

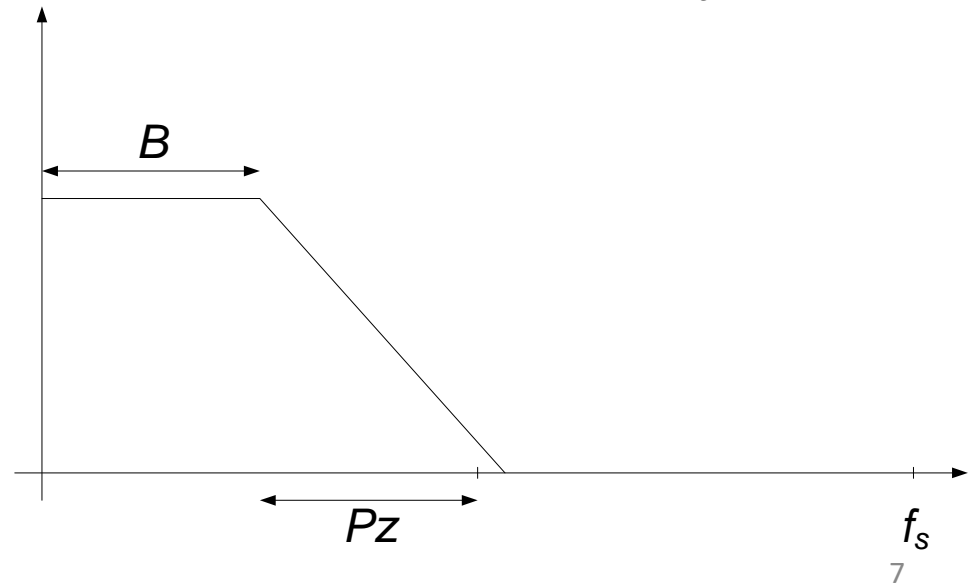
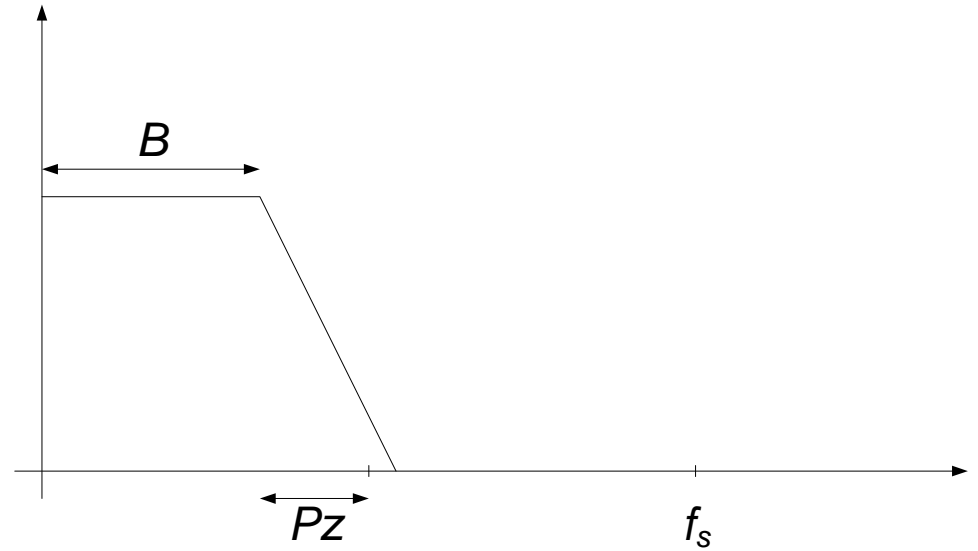
- Nadodabiranje
- Pododabiranje

# Nadodabiranje (*oversampling*)

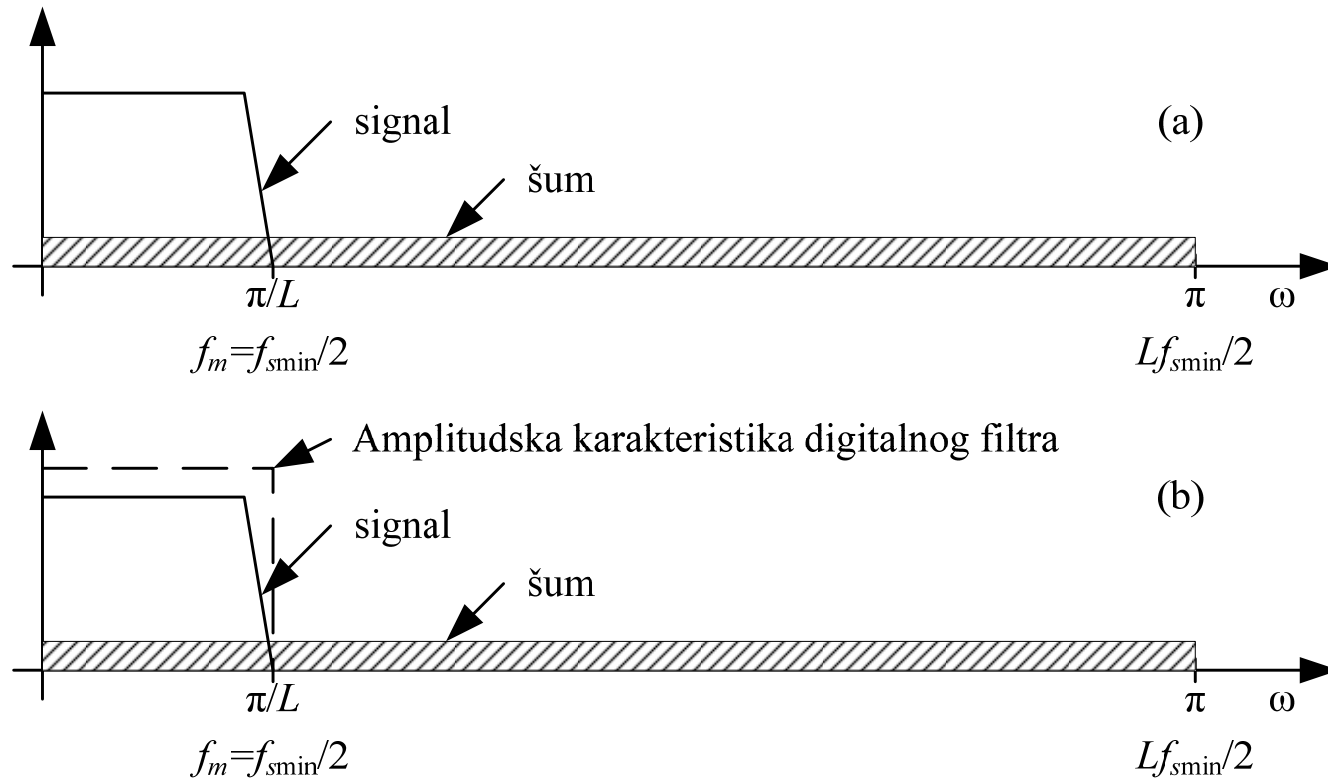
- Signal se odabira sa frekvencijom odabiranja  $Lf_{smin}$  pa se u digitalno domenu frekvencija odabiranja smanjuje na  $f_{smin}$
- Prednosti:
  - Jednostavnija realizacija analognog prefiltra
  - Dodatno potiskivanje šuma kvantizacije

# Nadodabiranje

Manje strogi zahtevi  
za anti-aliasing filter

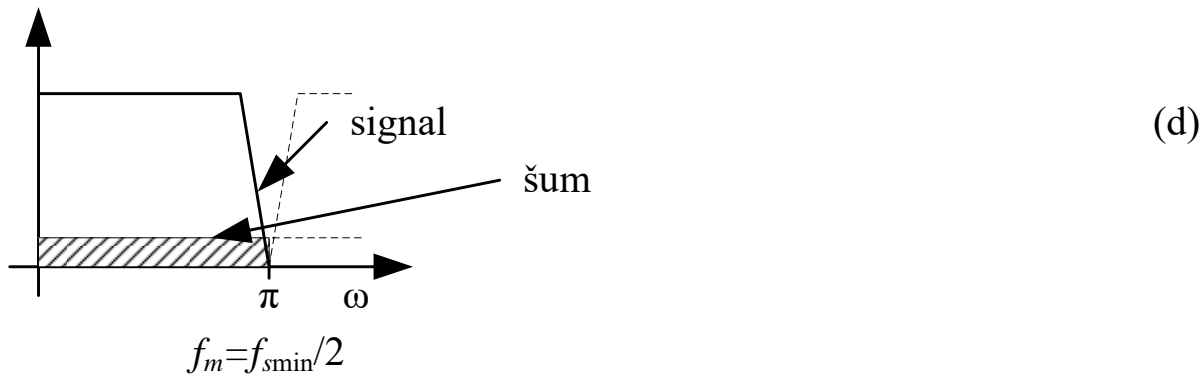
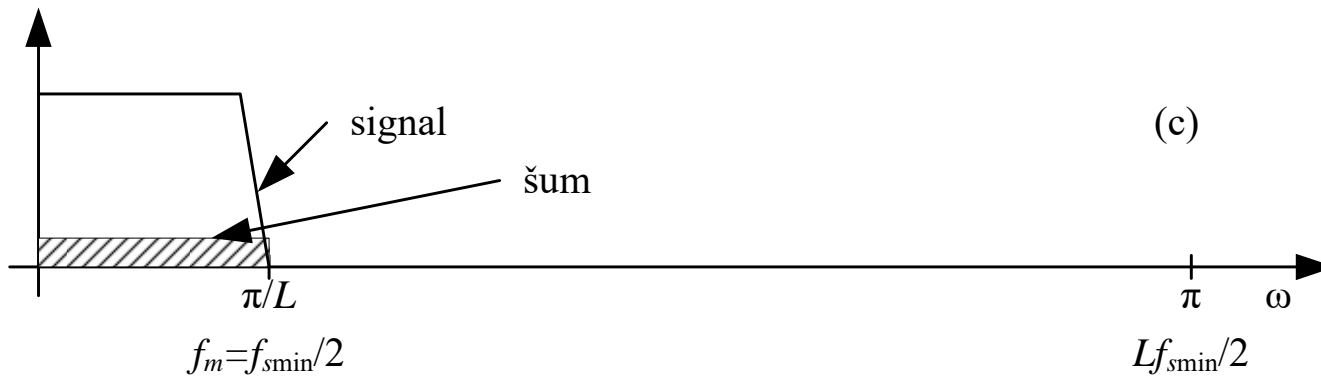


# Nadodabiranje





# Nadodabiranje

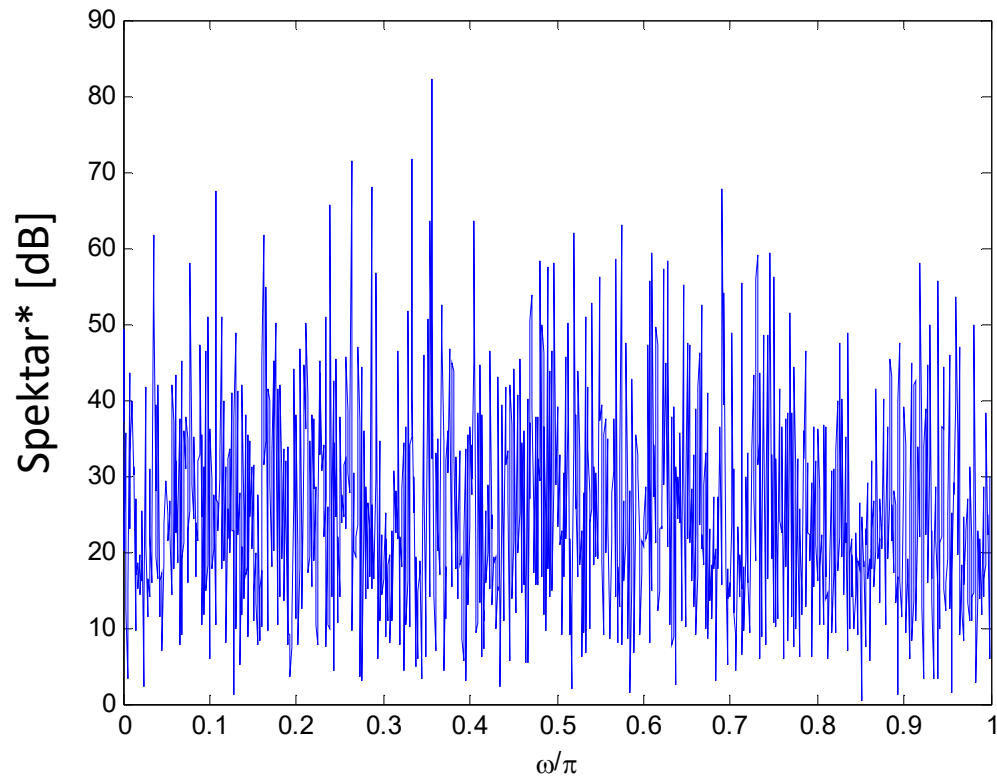


# Nadodabiranje

- Šum kvantizacije se može modelovati kao signal  $noise[n]$  nezavisan od korisnog signala  $s[n]$
- Odogvarajuće Furijeove transformacije su:  $N(e^{j\omega})$  i  $S(e^{j\omega})$ .
- Pretpostavka je da je maksimalna frekvencija u spektru korisnog signala  $f_m = f_{smin}/2$  što se, posle odabiranja s frekvencijom  $Lf_{smin}$ , preslikava u  $\pi/L$ .

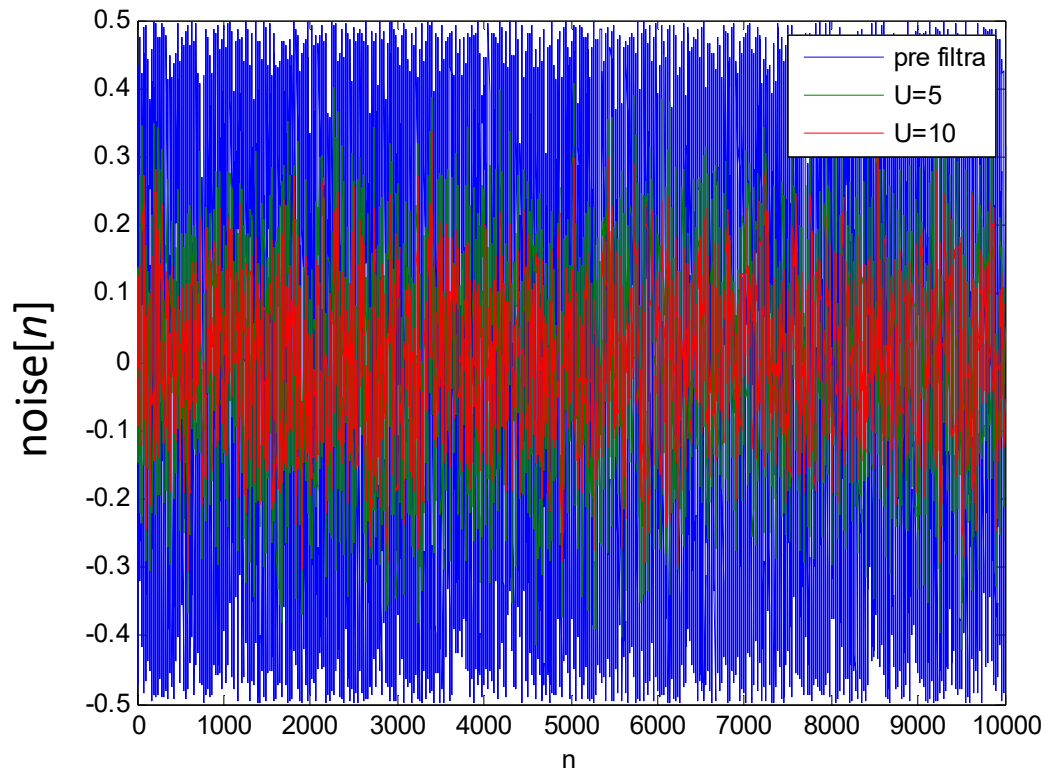
# Nadodabiranje

## Šum kvantizacije



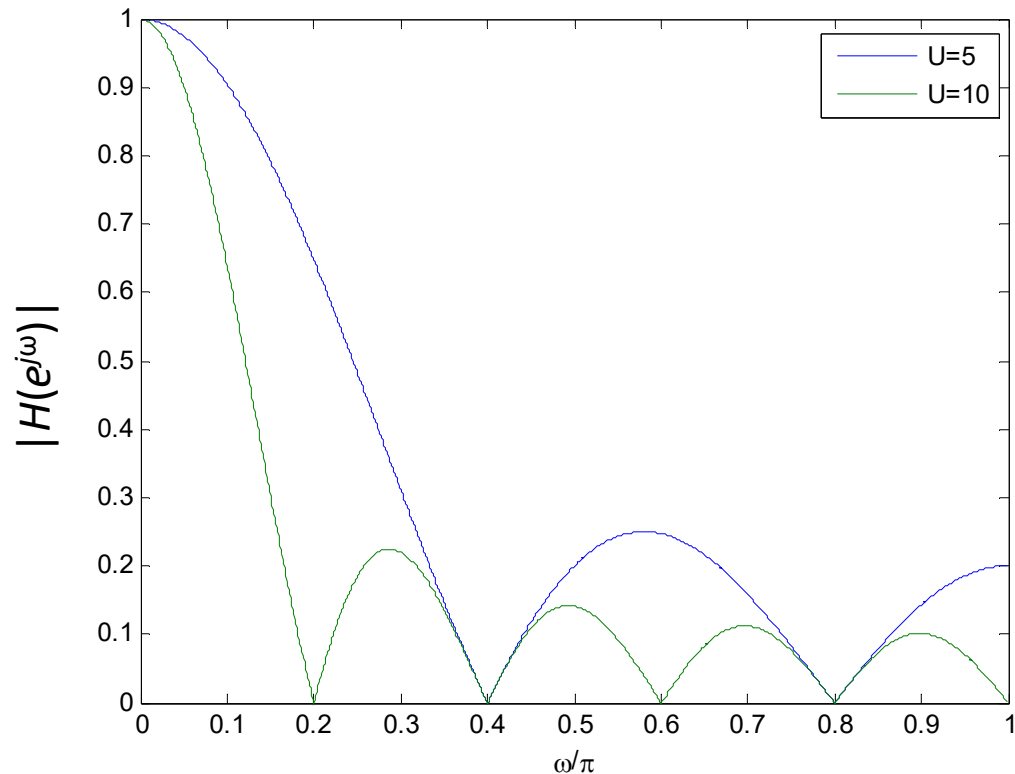
# Nadodabiranje

Uticaj filtra na šum kvantizacije



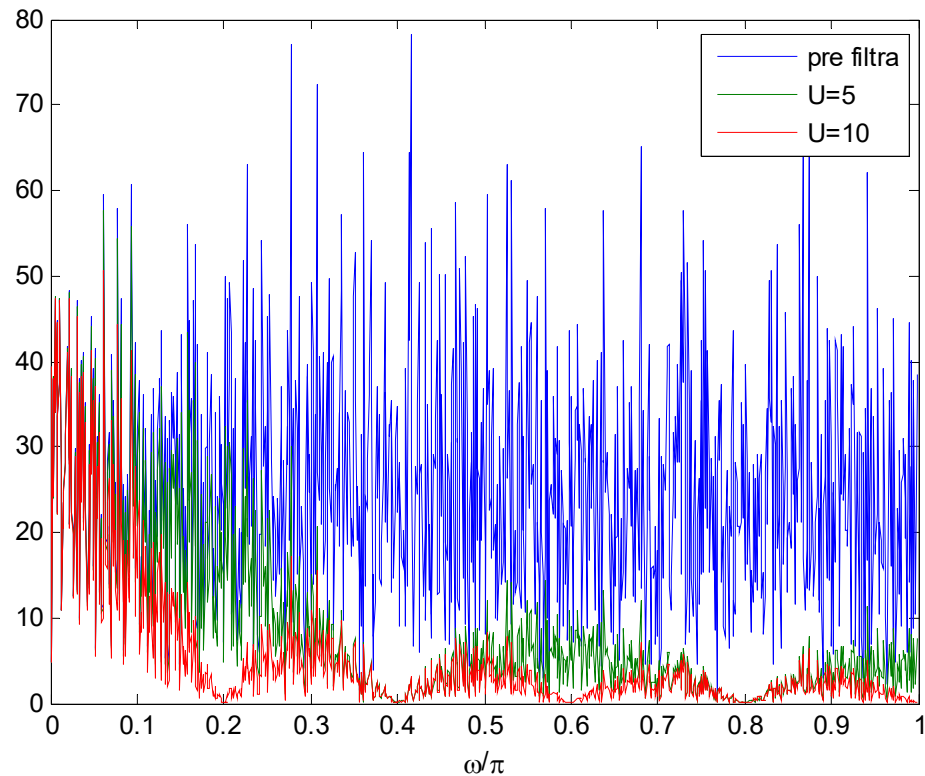
# Nadodabiranje

Uticao filtra  $H(e^{j\omega})$  na šum kvantizacije, filtri za usrednjavanje dužine  $U=5$  i  $U=10$



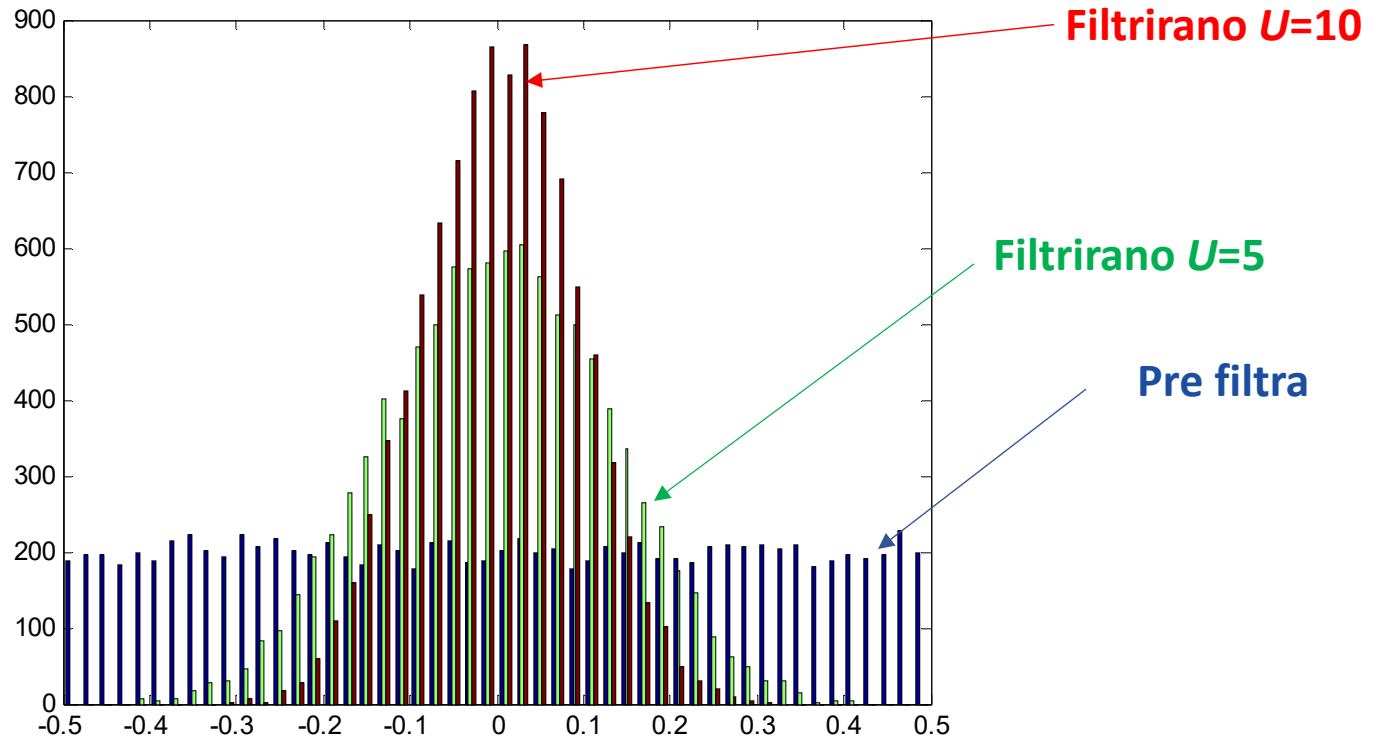
# Nadodabiranje

Uticaj filtra  $H(e^{j\omega})$  na šum kvantizacije

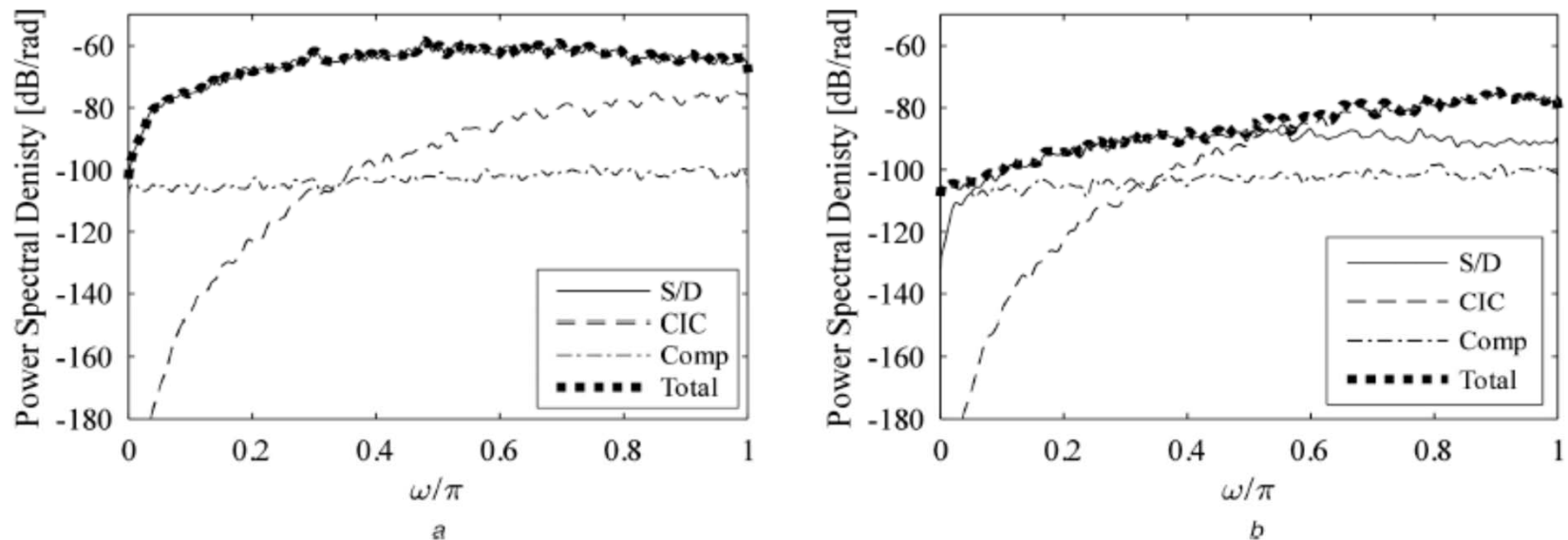


# Nadodabiranje

Uticaj filtra na šum kvantizacije – filtriranje menja raspodelu amplituda odbiraka šuma – počinje da „ličiti“ na Gausovu raspodelu



# Nadodabiranje



**Fig. 8** Power spectral density quantisation noise at the input, the CIC filter and in the compensation filter  
 (a)  $M=16$ , (b)  $M=128$

Bjelić M., Stanojević M., Čertić J. D. and Merkle M., “Statistical properties of quantisation noise in analogue-to-digital converter with oversampling and decimation”, *IET Circuits, Devices & Systems*, vol. 11, no. 5, pp. 421-427, September 2017.



# Pododabiranje (*Undersampling*)

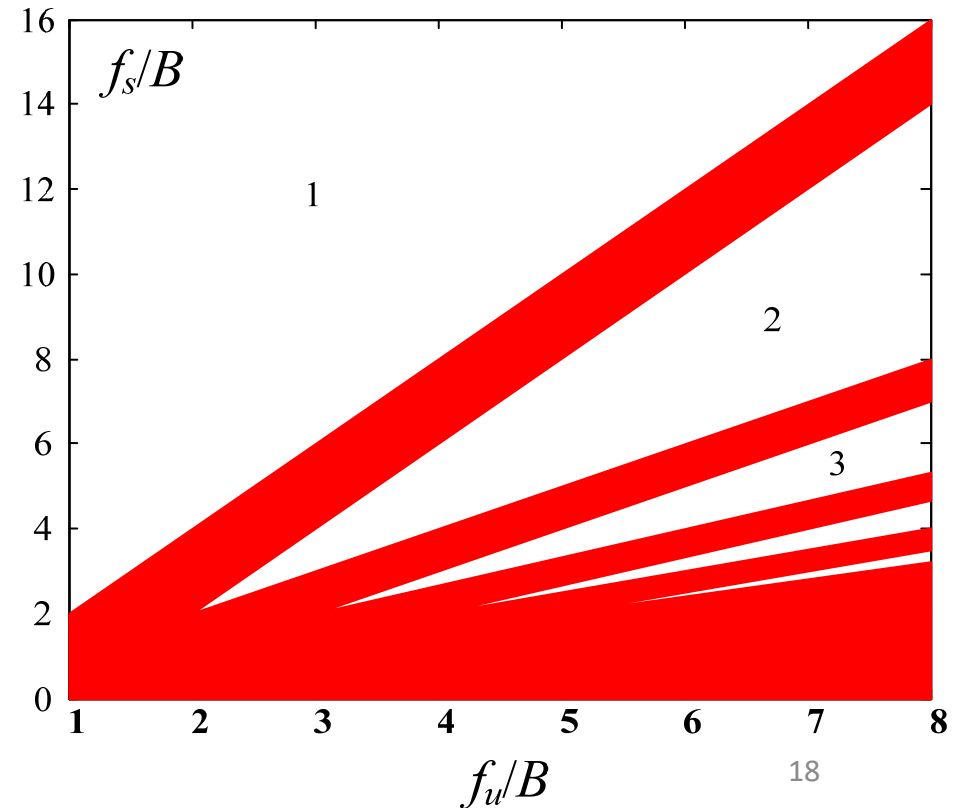
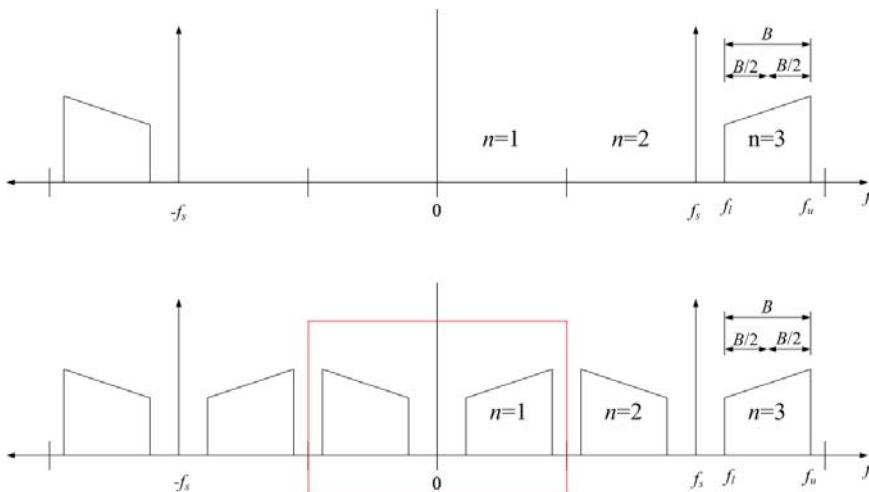
- Najčešće je opseg signala koji je od interesa (u RF ili MF opsegu) mnogo manji od maksimalne frekvencije u signalu:

$$\frac{2f_u}{n} \leq f_s \leq \frac{2f_l}{n-1}$$

- Pododabiranje smanjuje ukupan broj odbiraka koji se obrađuju u procesoru:
  - “Štedi se” procesorsko vreme - mogu se implementirati složeniji algoritimi
  - Potrebno je manje memorije

# Pododabiranje

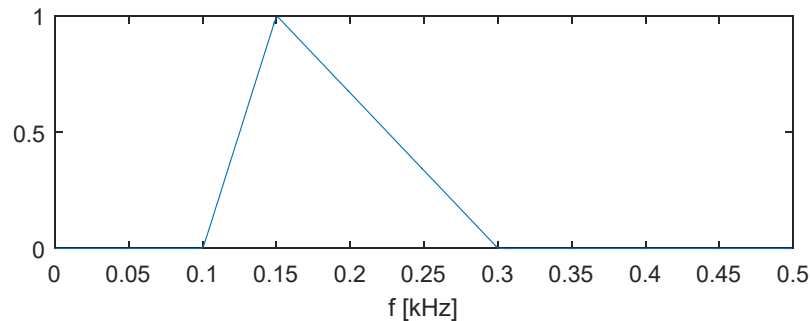
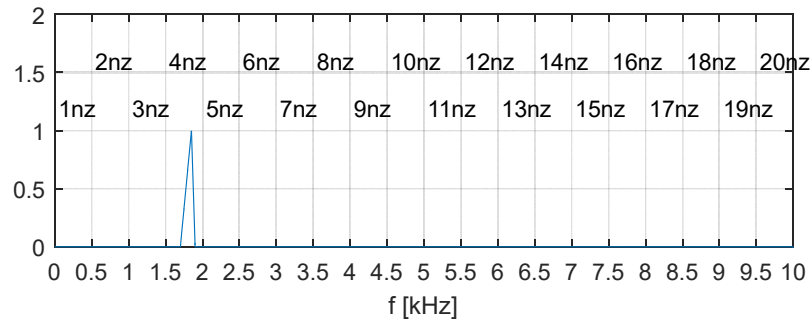
$$\frac{2f_u}{n} \leq f_s \leq \frac{2f_l}{n-1}$$



# Pododabiranje

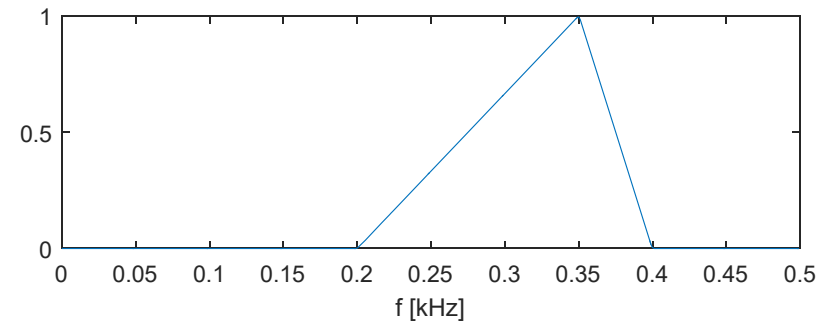
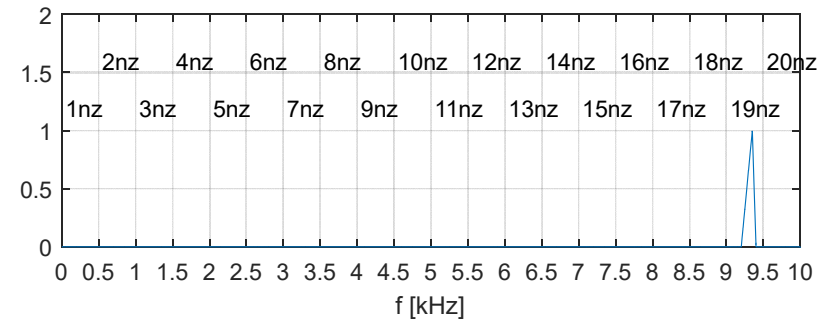
$$\frac{2 \cdot 1.9}{4} \text{ kHz} \leq f_s \leq \frac{2 \cdot 1.7}{3} \text{ kHz}$$

$$0.95 \text{ kHz} \leq f_s \leq 1.13 \text{ kHz}$$



$$\frac{2 \cdot 9.4}{19} \text{ kHz} \leq f_s \leq \frac{2 \cdot 9.2}{18} \text{ kHz}$$

$$0.99 \text{ kHz} \leq f_s \leq 1.02 \text{ kHz}$$



# Sistemi sa više brzina

- Frekvencija odabiranja nije ista za ceo sistem
- Pojednim delovima sistema odgovaraju različite frekvencije odabiranja
- Primeri:
  - Digitalni deo savremenih radio prijemnika
  - Konverzija između različitih standarda za audio aplikacije (na primer, 44100Hz i 48000Hz)
  - CD

# Softverski radio – tipičan primer sistema sa više brzina

- U svakom radio uređaju, deo obrade signala obavlja se u analognom domenu
- Nove tehnologije omogućavaju da se deo obrade signala obavlja digitalno
  - digitalno-analogna konverzija se pomera sve više ka izlazu iz predajnika
  - analogno-digitalna konverzija sve više se pomera ka ulazu u prijemnik
- Digitalna obrada signala može se izvesti softverski!

# Softverski radio - prednosti

- Jednostavniji prijemnici i predajnici
- Kompatibilnost sa novim oblicima signala, uključujući nove postupke modulacije i zaštitnog kodiranja, jer se uređaj može jednostavno reprogramirati
- Mogućnost da se jedan uređaj koristi u razne svrhe (podržava različite standarde)

# Softverski radio - prednosti

- Mogućnost da se 'u hodu' prebacuje sa jedne na drugu emulaciju radija, kako bi se omogućila interoperabilnost sa postojećim uređajima u blizini
- Smanjenje zone zračenja platforme i ušteda energije u situacijama kada više konvencionalnih uređaja treba zameniti jednim softverskim koji može da ih emulira

# Softverski radio – arhitektura

- U softverskom prijemu funkcionalnost je, umesto hardverom, definisana softverom
- Glavno ograničenje u funkcionalnosti digitalnog prijemnika predstavlja snaga trenutno raspoloživog DSP hardvera
- Na današnjem tehnološkom nivou, softverski prijemnik još uvek se NE realizuje kao potpuno digitalan, već kao hibrid analognog ulaznog stepena na radio-frekvenciji i digitalnog stepena



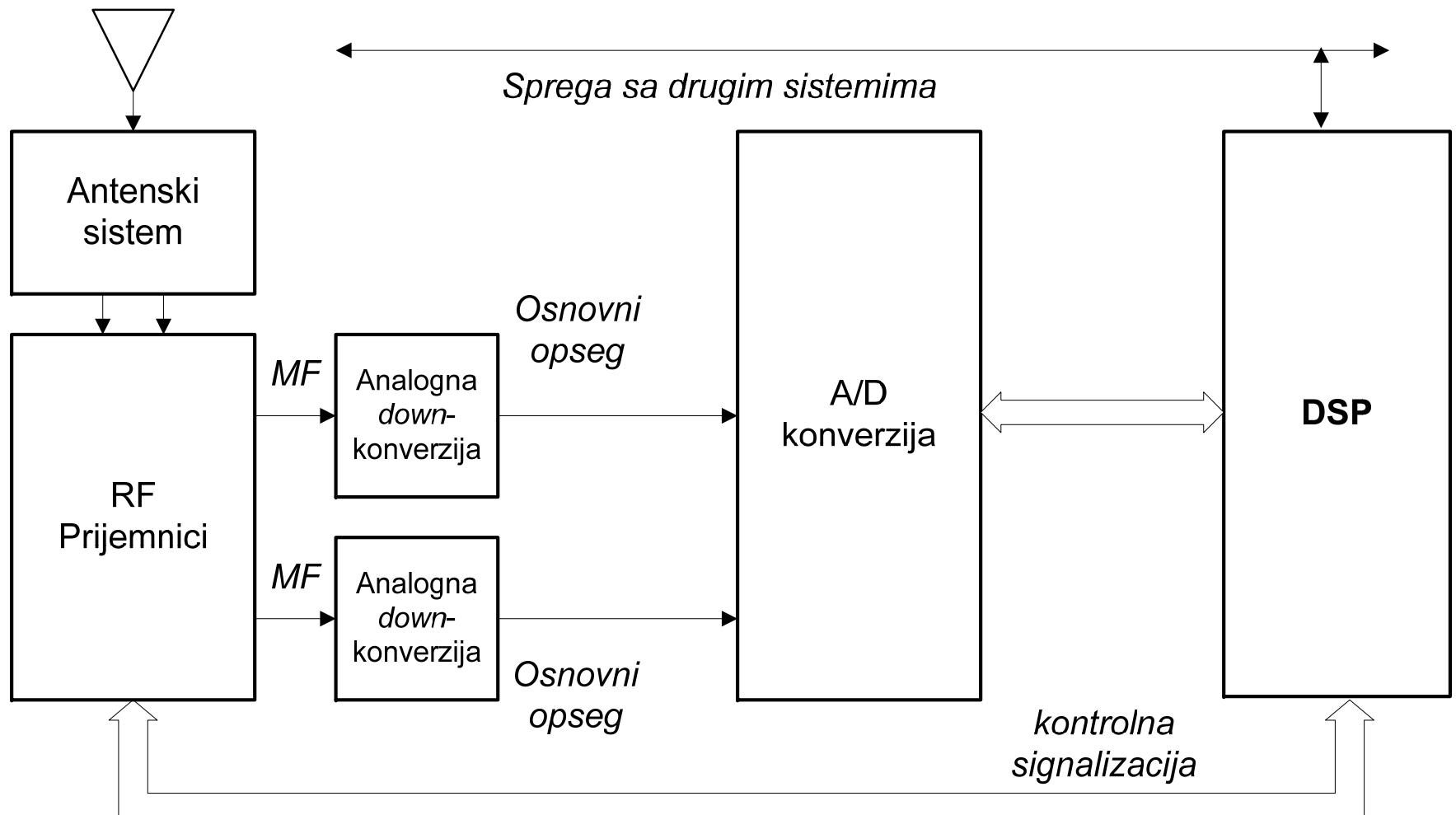
# Softverski radio – arhitektura

- Potrebno je definisati mesto u predajniku na kome se vrši D/A konverzija, odnosno mesto u prijemu na kome se vrši A/D konverzija
- Sa stanovišta obrade najpogodnije je rešenje u kome je praktično ceo sistem digitalan
- S aspekta raspoloživosti potrebnih komponenti jednostavnije je realizovati sistem u kome se deo predajnika realizuje u analognoj a deo u digitalnoj tehnologiji

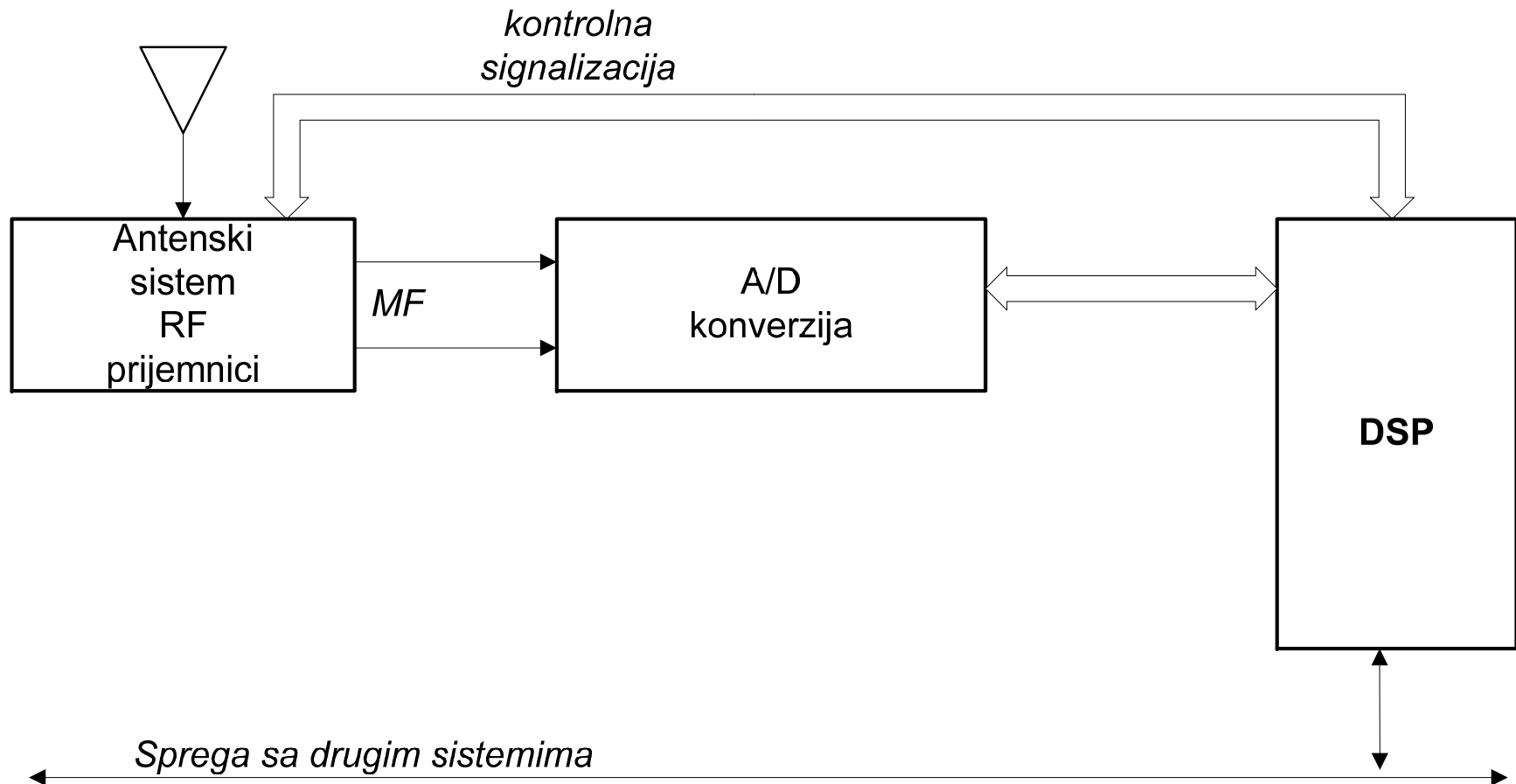
# Softverski radio – arhitektura

- Kritična je pre svega sama analogno-digitalna i digitalno-analogna konverzija, odnosno mogućnosti trenutno raspoloživih A/D i D/A konvertora
- Kada su na raspolaganju konvertori potrebnih brzina, direktna sprega brzog A/D konvertora (u prijemniku) s procesorom bi podrazumevala da procesor najveći deo raspoloživog vremena "troši" samo na prihvatanje podataka s A/D konvertora
- Između samog A/D konvertora i procesora postoji blok za digitalnu down-konverziju i decimaciju koji rasterećuje procesor

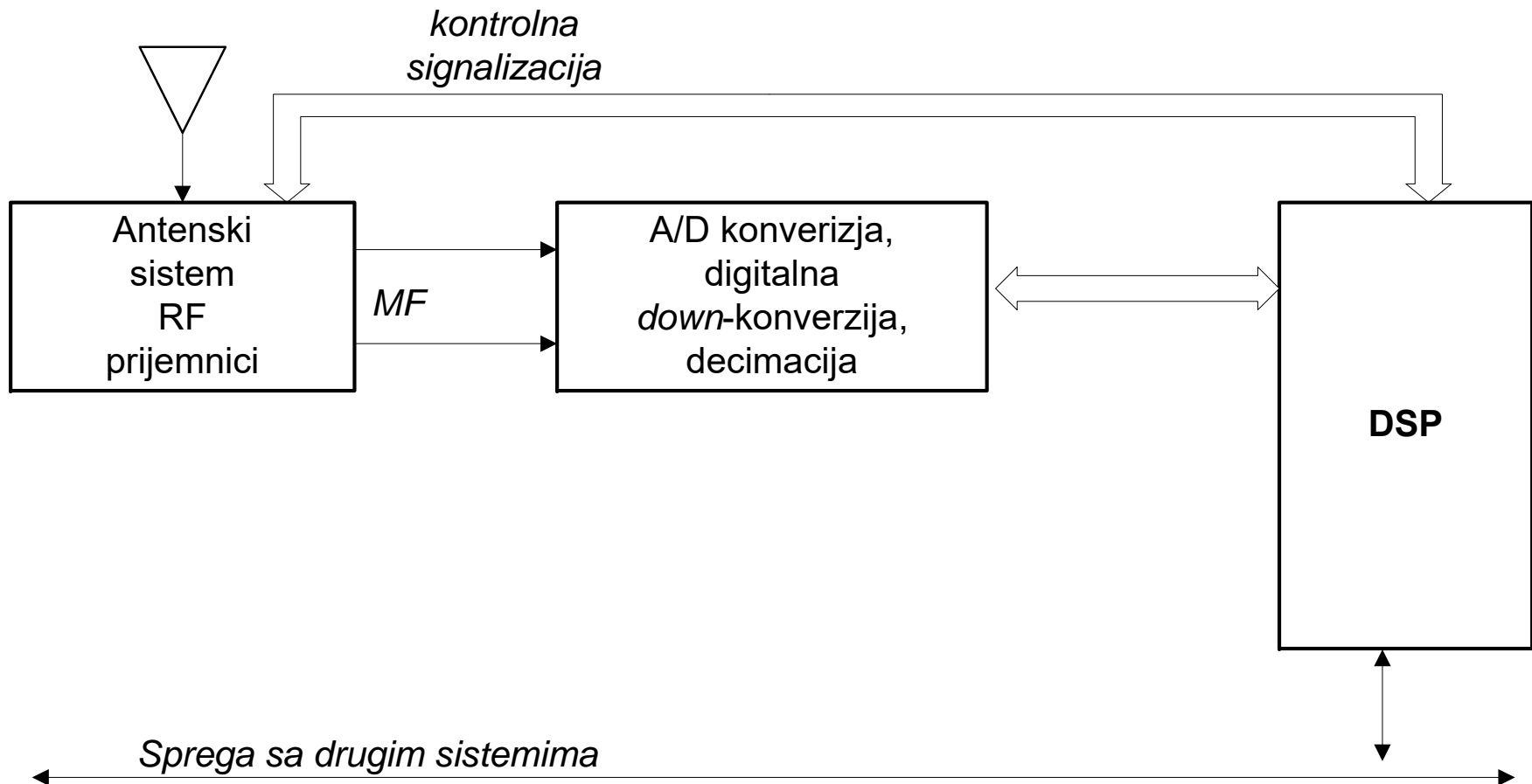
# SDR - arhitektura - verzija I



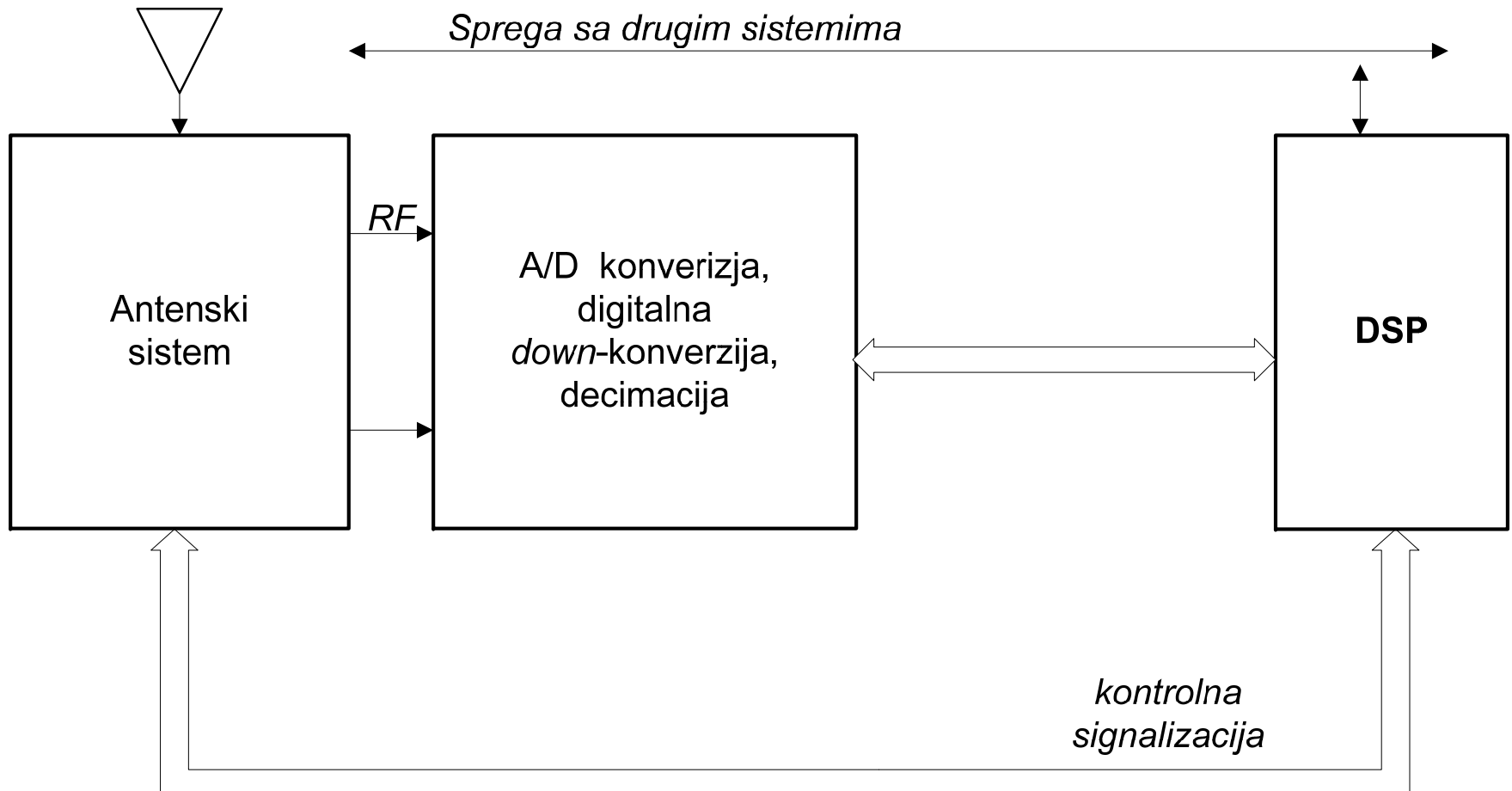
# SDR - arhitektura - verzija II



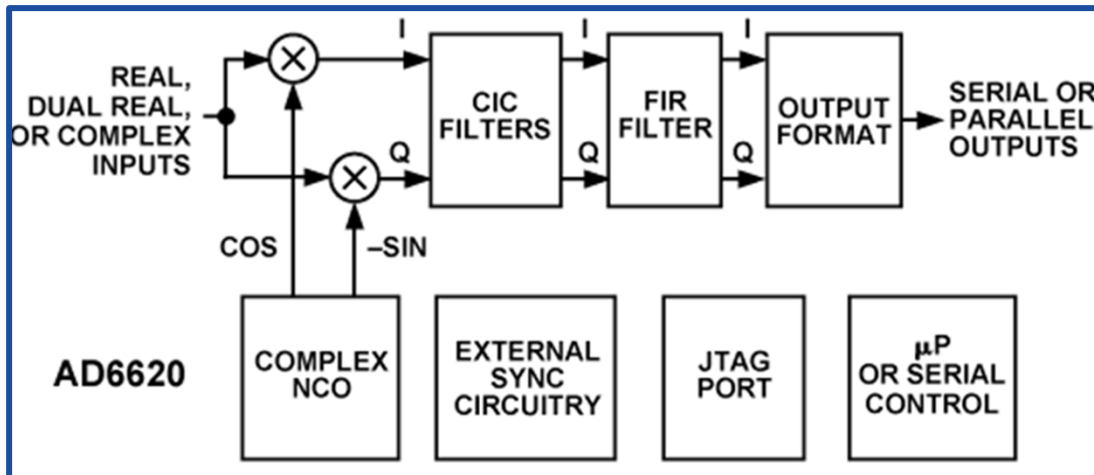
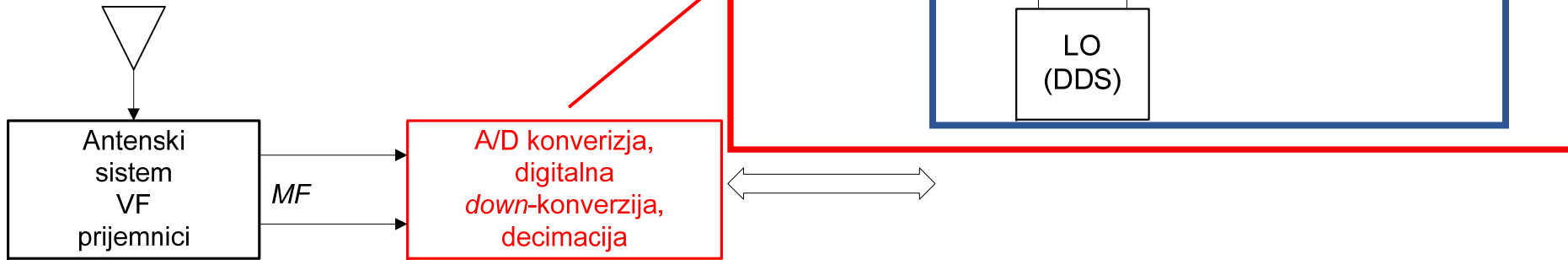
# SDR - arhitektura - verzija III



# SDR - arhitektura - verzija IV

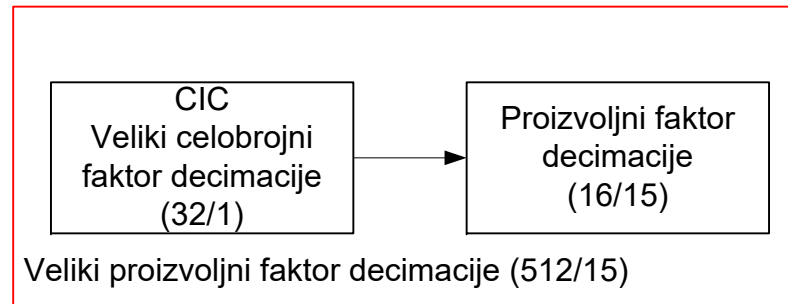


# SDR



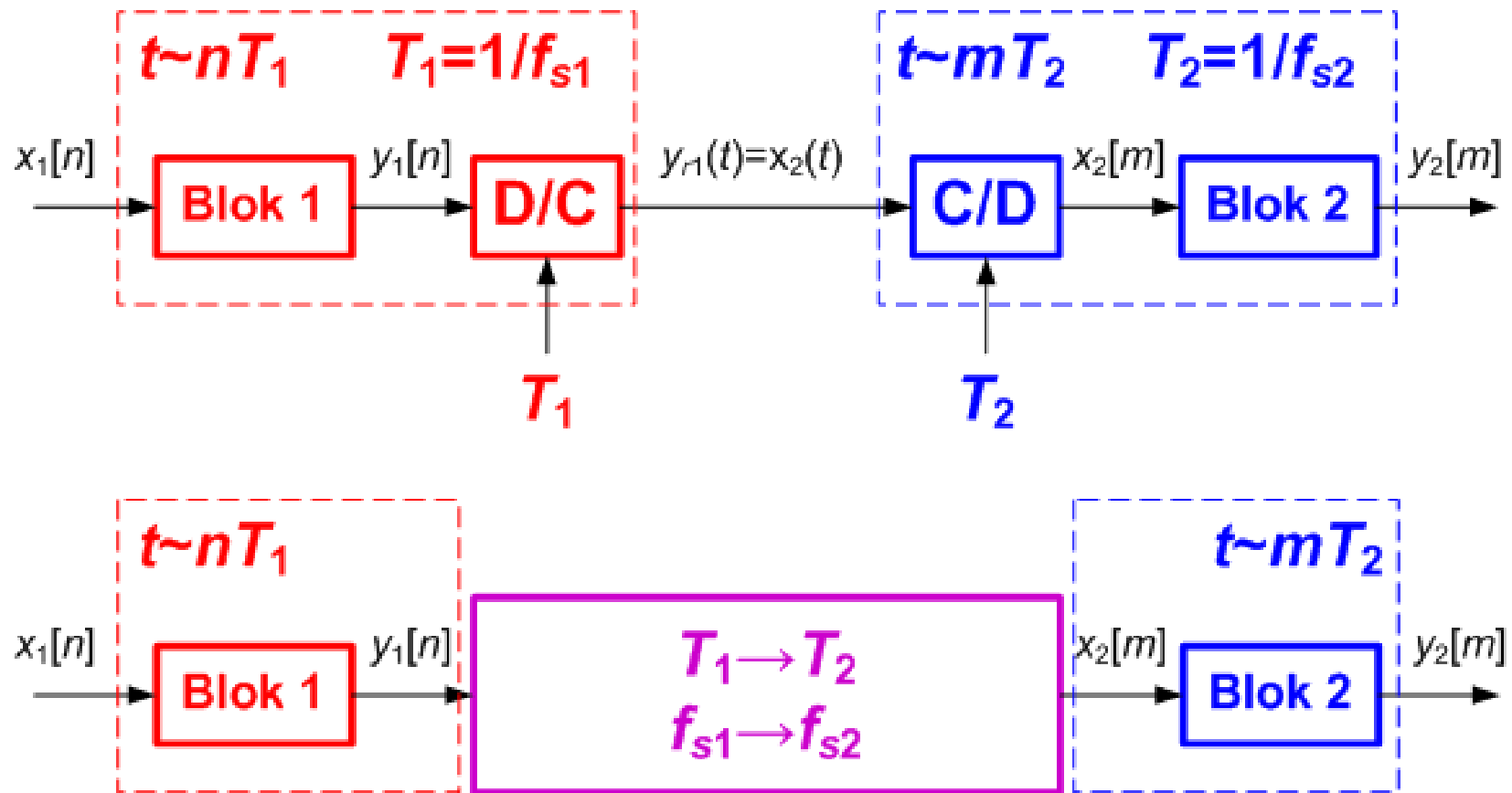
# Decimacija

- U softverskom radiju tipično se koriste:
  - CIC filtri za velike celobrojne faktore decimacije-interpolacije (često oblika  $2^k$ )
  - Promena učestanosti sa proizvoljnim faktorom (na taj način se obezbeđuje veća fleksibilnost i prilagodljivost sistema)





# Sistemi sa više brzina



# Osnovne operacije (blokovi) za promenu frekvencije odabiranja

- *Downsampling* – smanjuje frekvenciju odabiranja za celobrojni faktor  $M$
- *Upsampling* – povećava frekvenciju odabiranja za celobrojni faktor  $L$

# Downsampling

- Downsampling sa faktorom  $M$  se realizuje tako što se zadržava svaki  $M$ -ti odbirak signala a ostali se odbacuju

$$\{y[m]\} = \{x[mM]\}$$

- Šematski se označava blokom:



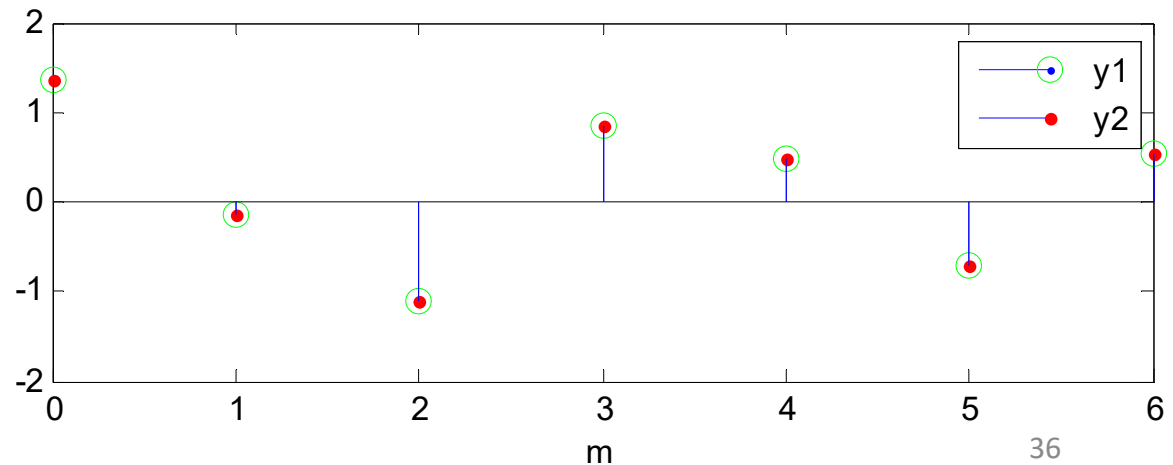
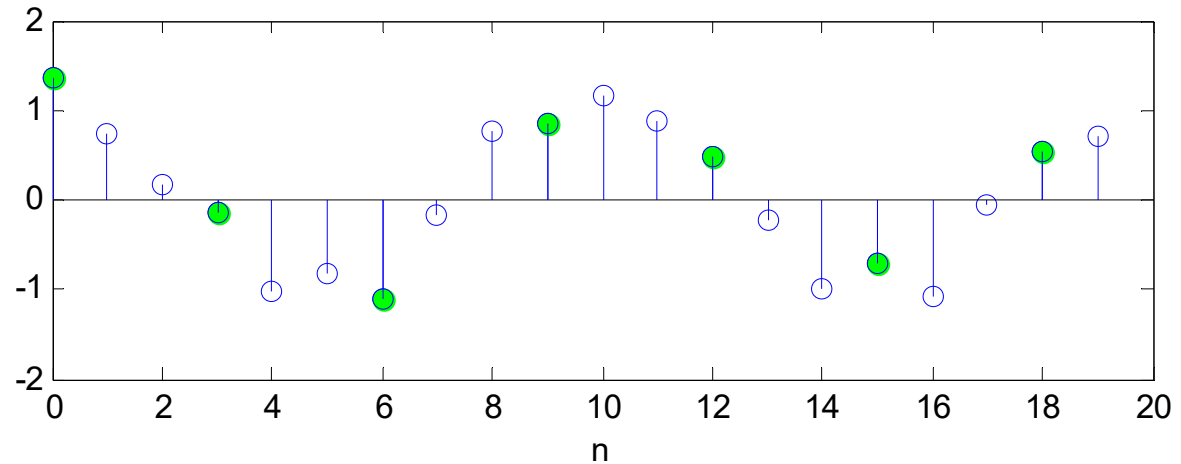
# Downsampling

$$\{y[m]\} = \{x[mM]\}$$

```

M=3;
y1=x(1:M:end);
y2=downsample(x,M);
figure,subplot(2,1,1),stem(n,x);
hold on
stem(0:M:N-1,x(1:M:N),...),
xlabel('n');
subplot(2,1,2),
stem(0:length(y1)-1,y1,...);
hold on
stem(0:length(y1)-1,y2,...),
xlabel('m'),legend('y1','y2');

```



# Upsampling

- Upsampling sa faktorom  $L$  se realizuje tako što se dodaje  $L-1$  nultih odbiraka između svaka dva odbirka signala

$$y[m] = \begin{cases} x\left[\frac{m}{L}\right], & m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- Šematski se označava blokom:



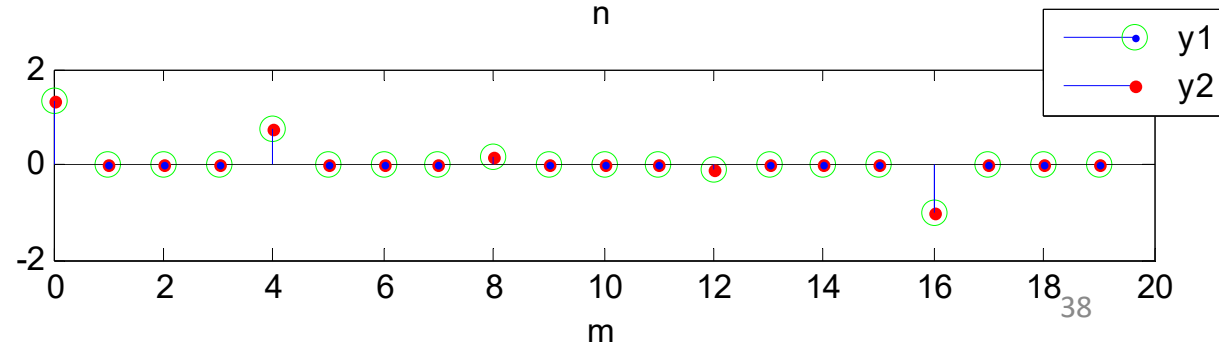
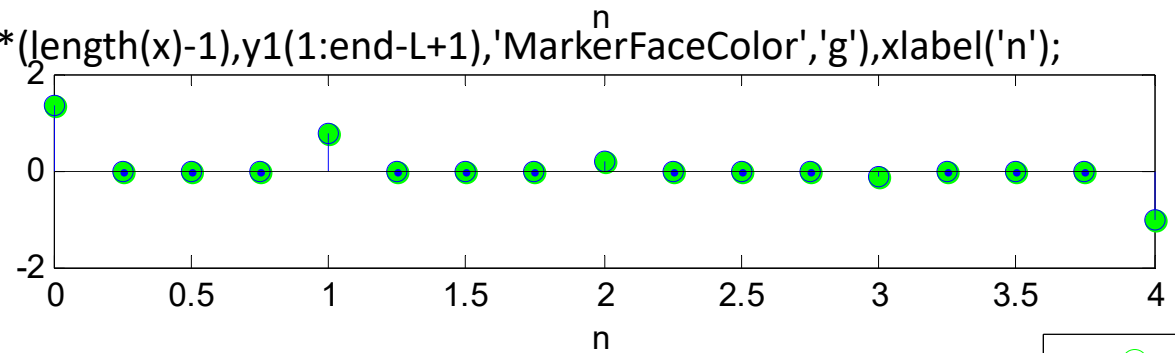
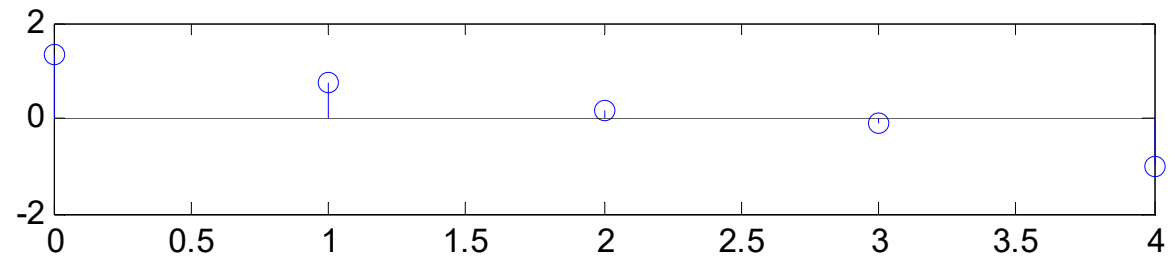
# Upsampling

```

L=4;
y1=zeros(L*length(x),1);
y1(1:L:end)=x;
y2=upsample(x,L);
figure,
subplot(3,1,1),stem(n,x),
xlabel('n');
subplot(3,1,2),
stem((0:length(y1)-L)/(length(y1)-L)*(length(x)-1),y1(1:end-L+1),'MarkerFaceColor','g'),xlabel('n');
subplot(3,1,3),
stem(0:length(y1)-1,y1,...);
hold on
stem(0:length(y2)-1,y2,...),
xlabel('m'),legend('y1','y2');

```

$$y[m] = \begin{cases} x\left[\frac{m}{L}\right], & m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



# *Downsampling* – spektralni domen

Da bi se izveo frekvencijski odziv *downsampling* bloka uvodi se pomoćna funkcija:

$$\{s_M[n]\} = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$y_s[n] = x[n]s_M[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\{y[m]\} = \{y_s[mM]\} = \{x[mM]\}$$

# Downsampling – spektralni domen

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mM] z^{-m}$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mM] z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_S[mM] z^{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_S[k] z^{-\frac{k}{M}} = Y_S\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$$

$$Y_S(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_M[n] x[n] z^{-n}$$

$$s_M[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn} \quad W_M = e^{-\frac{j2\pi}{M}}$$



# Downsampling – spektralni domen

$$Y_S(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn} \right) x[n] z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] W_M^{kn} z^{-n} \right)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z W_M^{-k})$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z \frac{1}{M} W_M^{-k}\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right)$$

$$\omega_H \leq \frac{\pi}{M}$$

Ponovljene skalirane replike

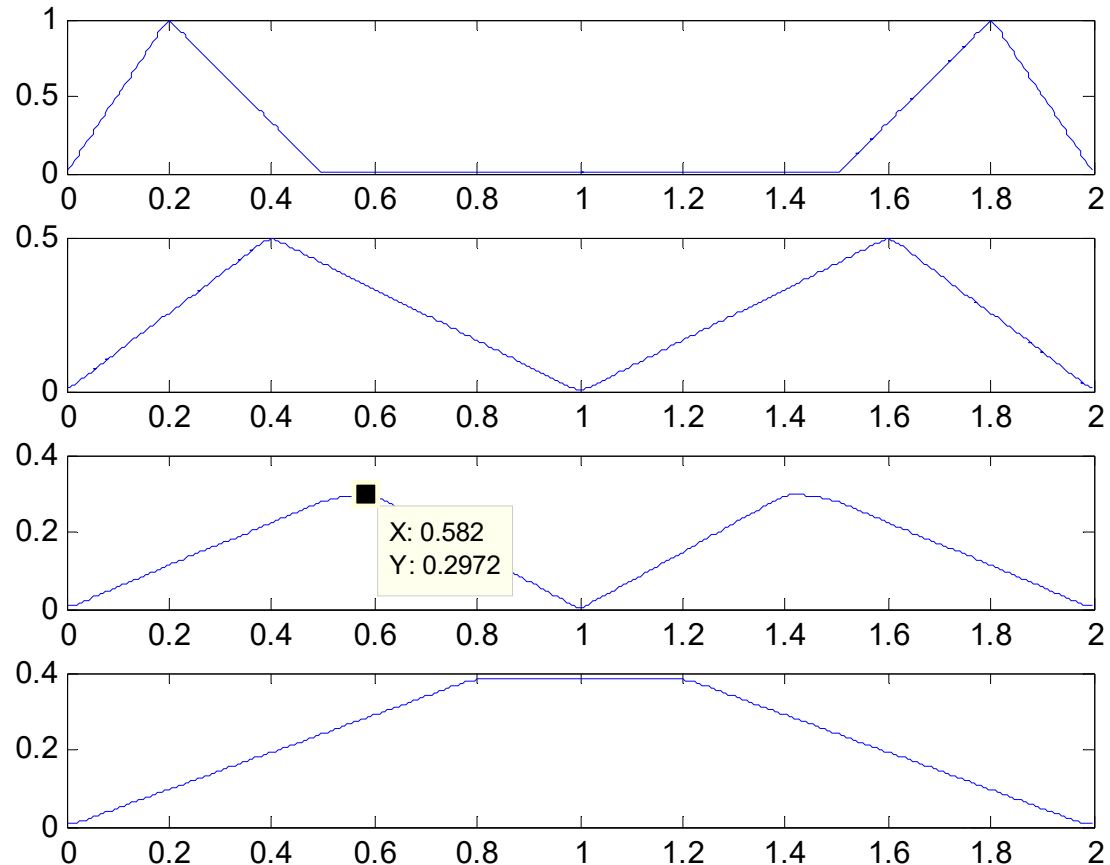
Uslov da nema preklapanja!!!

# Downsampling – spektralni domen

```

x2=x(1:2:end);
x3=x(1:3:end);
x4=x(1:4:end);
[X,w]=freqz(x,1,'whole');
[X2,w]=freqz(x2,1,'whole');
[X3,w]=freqz(x3,1,'whole');
[X4,w]=freqz(x4,1,'whole');
figure,
subplot(4,1,1);plot(w/pi,abs(X));
subplot(4,1,2);plot(w/pi,abs(X2));
subplot(4,1,3);plot(w/pi,abs(X3));
subplot(4,1,4);plot(w/pi,abs(X4));

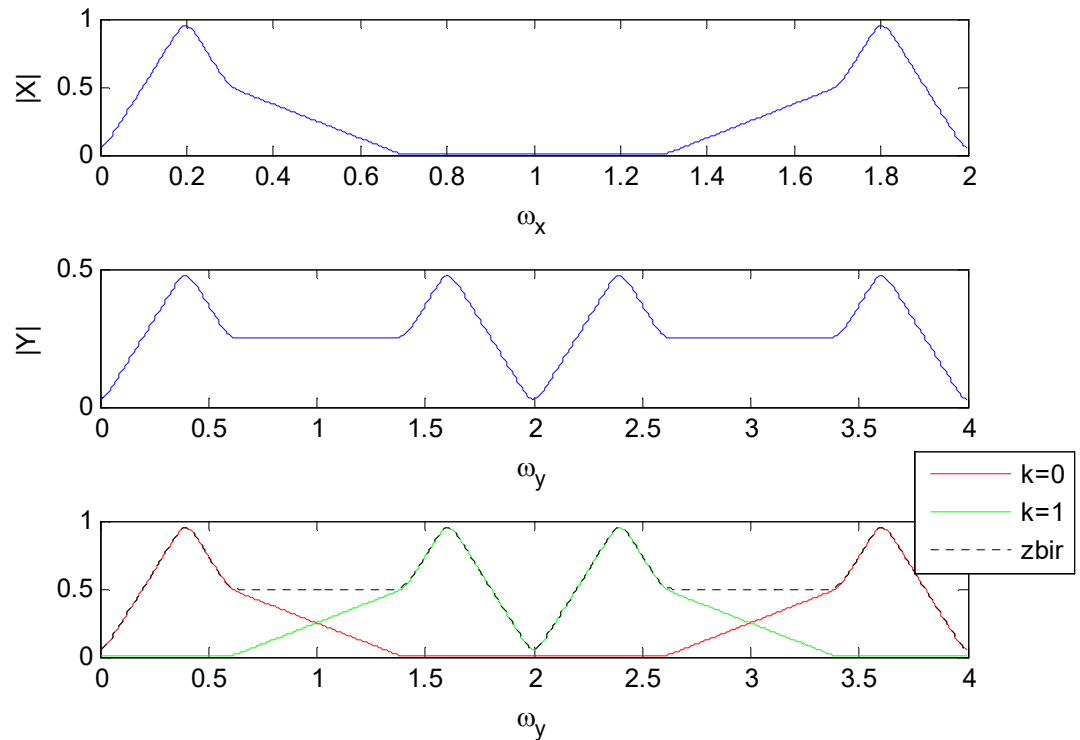
```



# Downsampling – spektralni domen

**M=2**

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right)$$



# Upsampling – spektralni domen

$$y[m] = \left\{ \begin{array}{l} x\left[\frac{m}{L}\right], \quad m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, \quad \text{inače} \end{array} \right\}$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]z^{-m} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=mL}}^{\infty} x\left[\frac{n}{L}\right]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-Lm} = X(z^L)$$

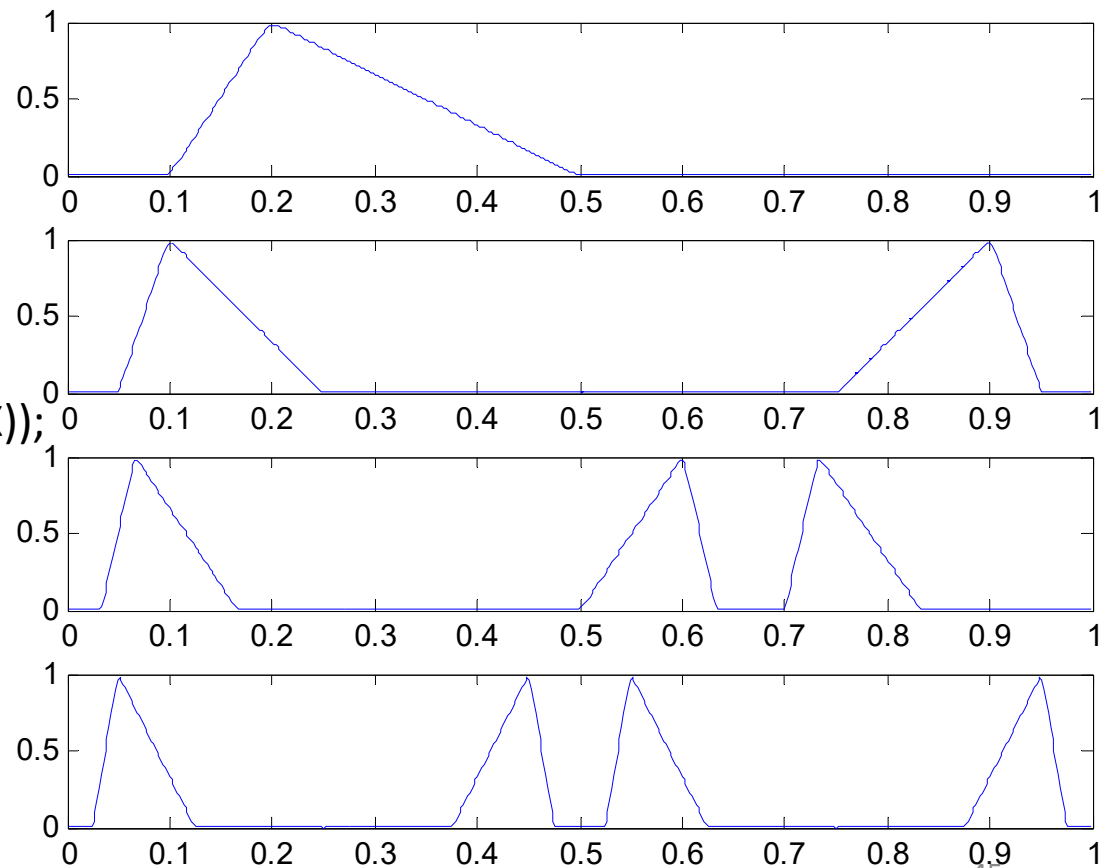
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

# Upsampling – spektralni domen

```

x2=upsample(x,2);
x3=upsample(x,3);
x4=upsample(x,4);
[X,w]=freqz(x,1);
[X2,w]=freqz(x2);
[X3,w]=freqz(x3);
[X4,w]=freqz(x4);
figure,subplot(4,1,1);plot(w/pi,abs(X));
subplot(4,1,2);plot(w/pi,abs(X2));
subplot(4,1,3);plot(w/pi,abs(X3));
subplot(4,1,4);plot(w/pi,abs(X4));

```



# Vremenska zavisnost

Operacija *downsampling*-a je vremenski zavisna –  
**NIJE Time Invariant**

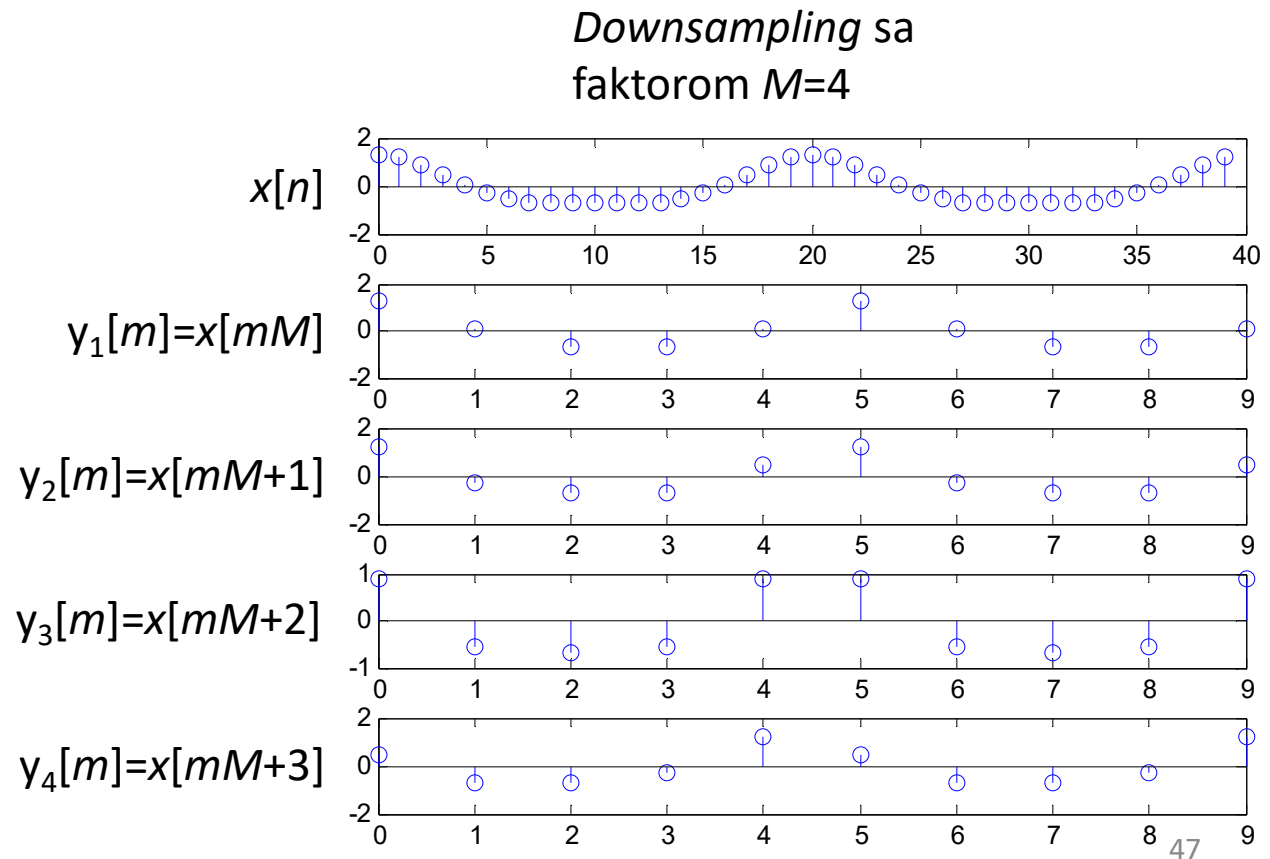
$$\{y[m]\} = \{x[mM]\}$$

$$\{x_1[n]\} = \{x[n - n_0]\}$$

$$y_1[m] = x[mM - n_0] = y\left[\frac{mM - n_0}{M}\right] = y\left[m - \frac{n_0}{M}\right] \neq y[m - n_0]$$

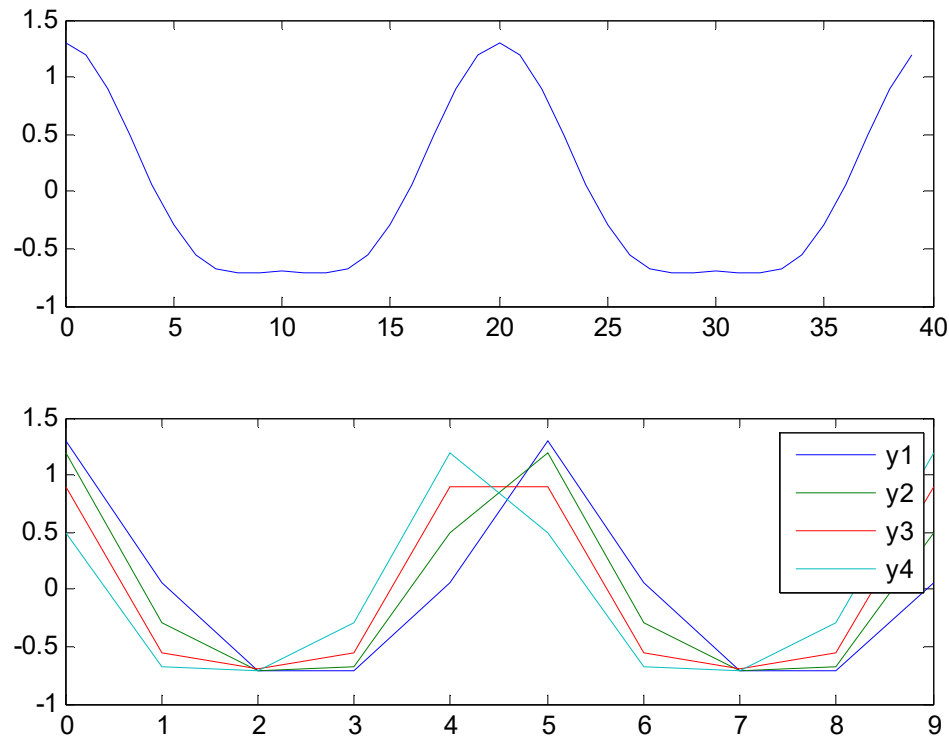
# Vremenska zavisnost

Operacija *downsampling*-a je vremenski zavisna



# Vremenska zavisnost

Operacija *downsampling*-a je vremenski zavisna





# Vremenska zavisnost

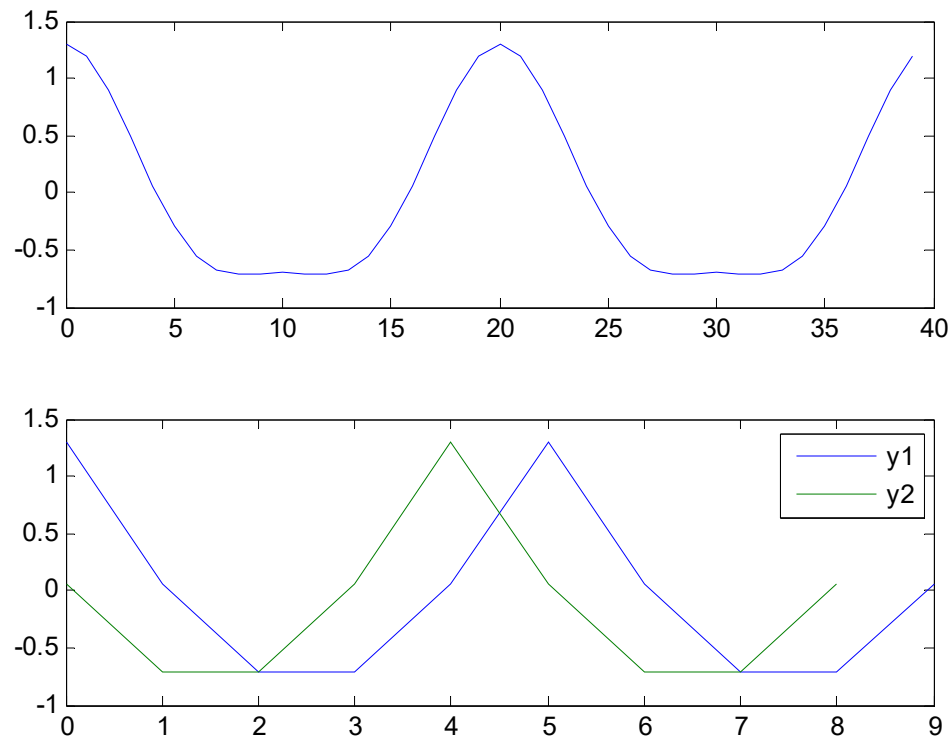
Operacija *downsampling*-a je **periodično** vremenski invarijantna

$$n_0 = kM$$

$$y_1[m] = x[mM - kM] = y\left[\frac{mM - kM}{M}\right] = y[m - k]$$

# Vremenska zavisnost

Operacija *downsampling*-a je periodično vremenski invarijantna



# Vremenska zavisnost

Operacija *upsampling*-a “čuva” oblik signala

$$y_1[m] = \left\{ \begin{array}{l} x_1\left[\frac{m}{L}\right], \quad m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, \quad \textit{inače} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x\left[\frac{m - Ln_0}{L}\right], \quad m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, \quad \textit{inače} \end{array} \right\} \neq y[m - n_0]$$

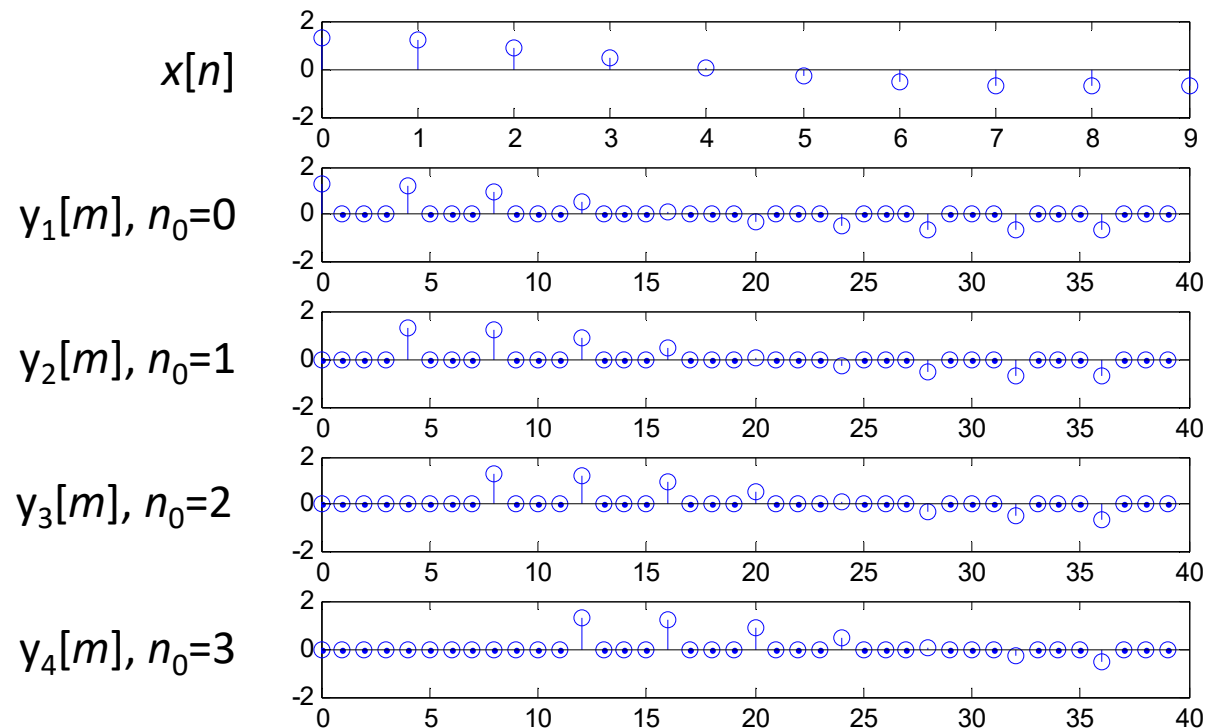
$$y[m - n_0] = \left\{ \begin{array}{l} x\left[\frac{m - n_0}{L}\right], \quad m = n_0, n_0 \pm L, n_0 \pm 2L, \dots \\ 0, \quad \textit{inače} \end{array} \right\}$$

$$y_1[m] = y[m - Ln_0]$$

# Vremenska zavisnost

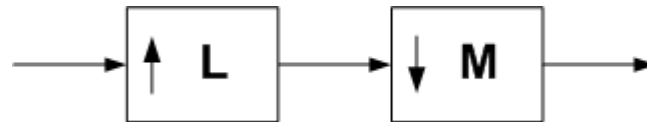
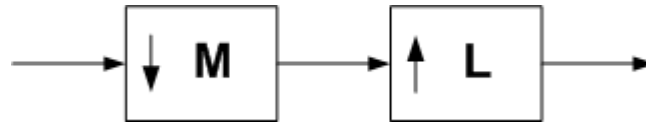
## Operacija *upsampling*-a

*Upsampling* sa  
faktorom  $L=4$

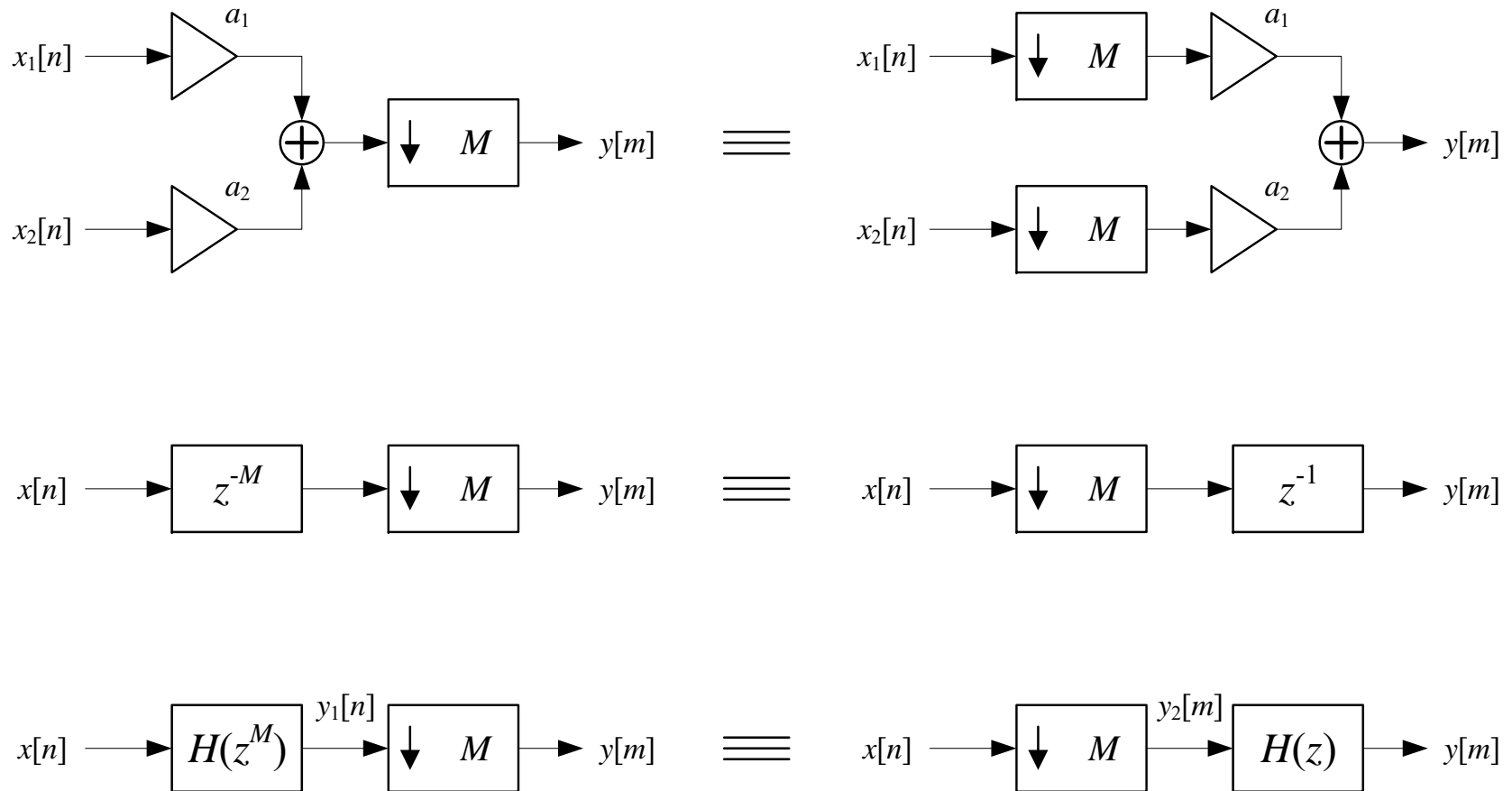


# Kada operacije *downsample* i *upsample* mogu da zamene mesta?

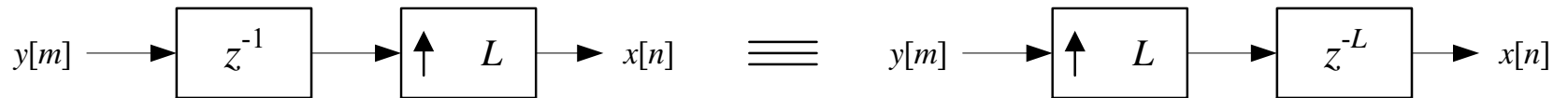
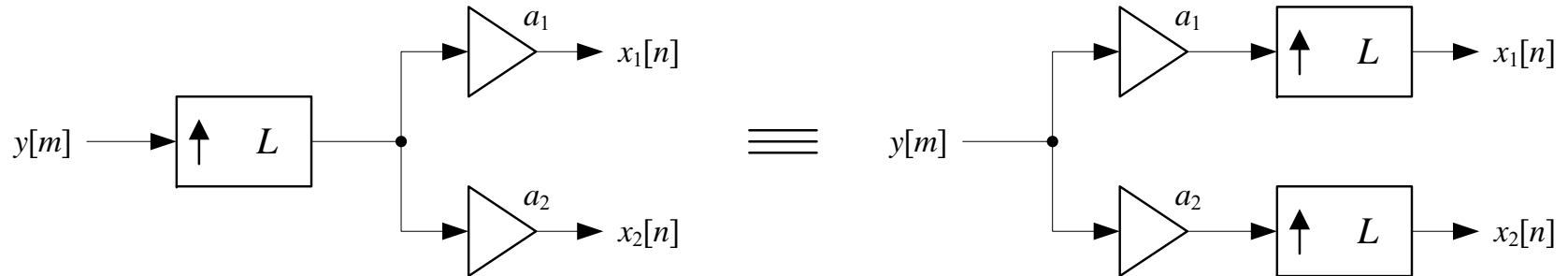
Kada su  $M$  i  $L$  uzajamno prosti



# Osobine



# Osobine



# Osobine

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n}$$

$$H(z^M) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n](z^M)^{-n} = \sum_{n=0}^{NM-1} h_i[n]z^{-n}$$

$$h_i[n] = \begin{cases} h\left[\frac{n}{M}\right], & n = 0, M, 2M, \dots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$H(z^M) = h[0](z^M)^0 + h[1](z^M)^{-1} + h[2](z^M)^{-2} + \dots + h[N-1](z^M)^{-(N-1)}$$

$$H(z^M) = h_i[0] + h_i[1]z^{-1} + \dots + h_i[M]z^{-M} + \dots$$