



BENEFIT

Boosting the telecommunications
engineer profile to meet modern
society and industry needs

Sistemi sa više brzina (13M031SVB)

Deo 4

Master studije

Jelena Čertić, Katedra za Telekomunikacije,
Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Tehnika frekvencijskog maskiranja

- Metoda projektovanja filtara gde se kombinacijom više filtara dobija filter željne selektivnosti, tako da je ukupan broj množaka u svim filtrima manji nego kada bi se filter projektovao direktno
- Podvarijanta tehnike frekvencijskog maskiranja se zove i interpolirani filter

Problem koji se rešava

- Tipično, kod FIR filtara kod kojih je zahtevana širina prelazne zone veoma mala (selektivni filtri) red filtra postaje veoma veliki
- Sa stanovišta realizacije, problem je veliki broj računskih operacija množenja, kao i veliki broj potrebnih memorijskih lokacija za čuvanje odbiraka signala i koeficijenata filtra
- Sa stanovišta samog dizajna, selektivni filtri imaju koncentrisane nule (i polove za IIR filtre) pa je osetljivost po pravilu veća

Moguća rešenja

- Očigledno rešenje je da se filter realizuje kao kaskada veza više filtera (kod IIR praktično uvek, time se kod IIR rešava problem osetljivosti)
- Ukupan potreban broj računskih operacija množenja ostaje približno isti ili se čak povećava, slično je i sa zauzećem memorije
- Rešenje koje se koristi je tehnika frekvencijskog maskiranja

Frekvencijsko maskiranje

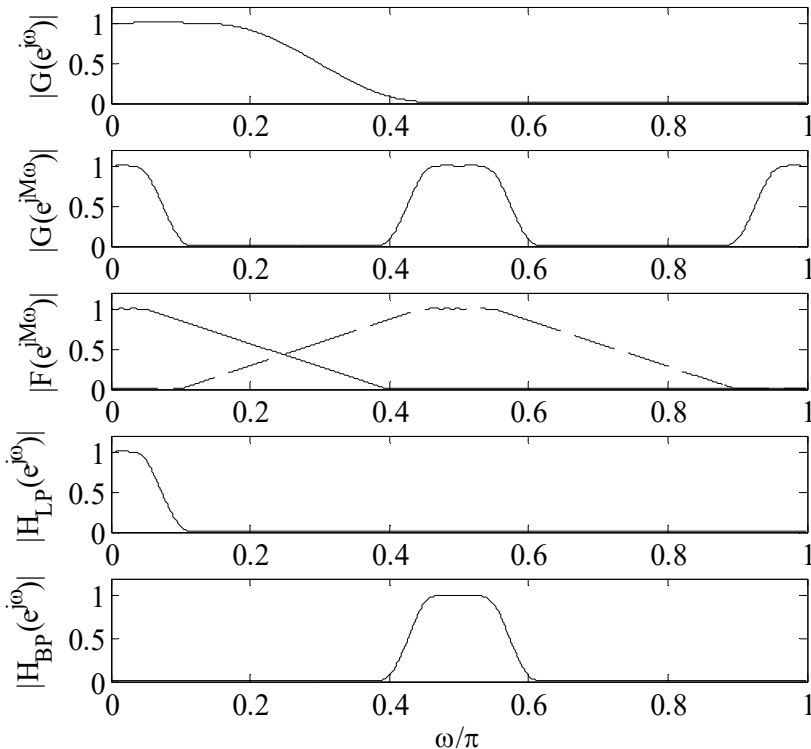
- Jednostavnija varijanta zove se interpolirani filter i sastoji se od kaskade veze dva filtra,

$$H(z) = G_M(z)F(z)$$

- od kojih je prvi dobijen *upsamplingom* impulsnog odziva „umereno selektivnog“ FIR filtra

$$G_M(z) = G(z^M)$$

Frekvencijsko maskiranje

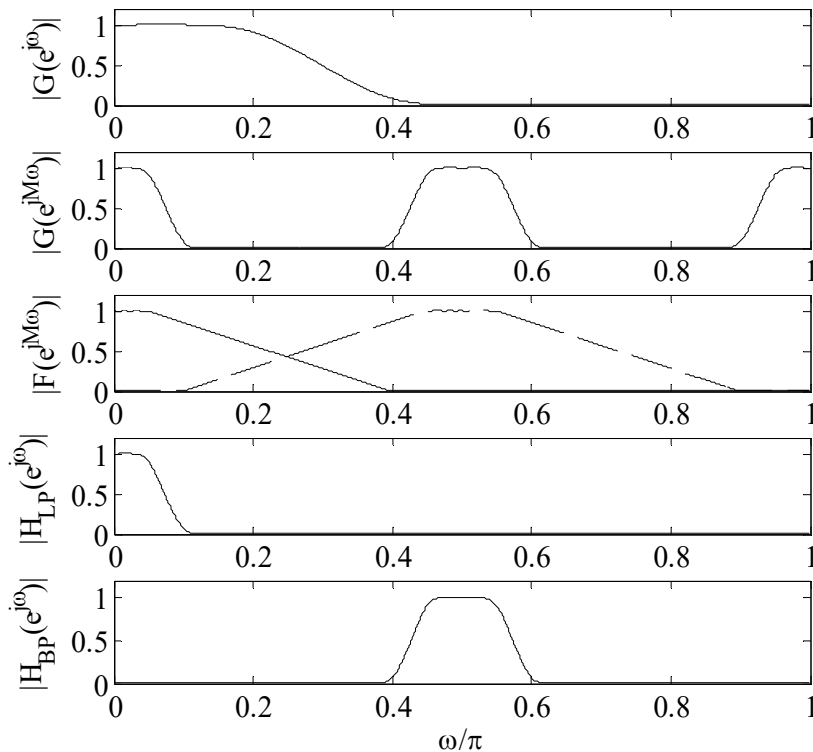


A zatim se takozvanim maskirajućim filtrom potisnu neželjene komponente filtra $G_M(z)=G(z^M)$

Može se dobiti selektivniji LP filter

Ili BP filter

Frekvencijsko maskiranje



Red i sliženost filtra $G(z)$ nije prevelika, a broj nenultih koeficijenata filtra $G_M(z)$ je isti kao kod filtra $G(z)$

Red i složenost maskirajućih filtara je znatno manja

Ukupan broj koeficijenata u obe kaskade je manji u odnosu na direktno projektovanje filtra

Frekvencijsko maskiranje - generalizacija

- Primena tehnike frekvencijskog maskiranja se, donekle, razlikuje kada se projektuju filtri uskog propusnog opsega i kada se projektuju filtri relativno širokog propusnog opsega (do sada opisano, radi samo za filtre uskog propusnog opsega)
- U literaturi se slučaj kada se projektuje uskopojasni filter naziva i interpolirani filter

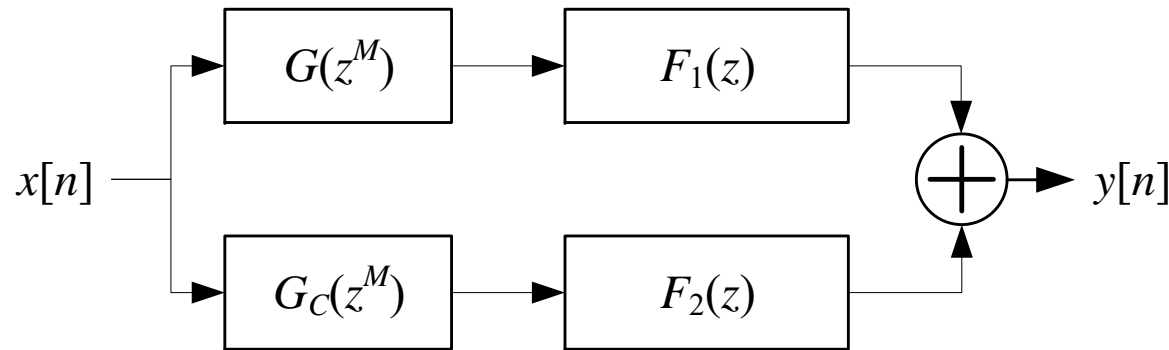
Frekvencijsko maskiranje - generalizacija

- Za filtre relativno širokog propusnog opsega koristi se nešto složenija principska šema koja se sastoji od ukupno četiri filtra
- Funkcija prenosa rezultujućeg filtra se može izraziti kao:

$$H(z) = G(z^M)F_1(z) + G_C(z^M)F_2(z)$$

gde su filtri $G(z^M)$ i $G_C(z^M)$ dobijeni od komplementarnih filtara $G(z)$ (propusnik niskih frekvencija) i $G_C(z)$ (propusnik visokih frekvencija) zamenom jedne ćelije za kašnjenje nizom od M ćelija za kašnjenje (*upsampling*). Filtri $F_1(z)$ i $F_2(z)$ su maskirajući filtri propusnici niskih frekvencija.

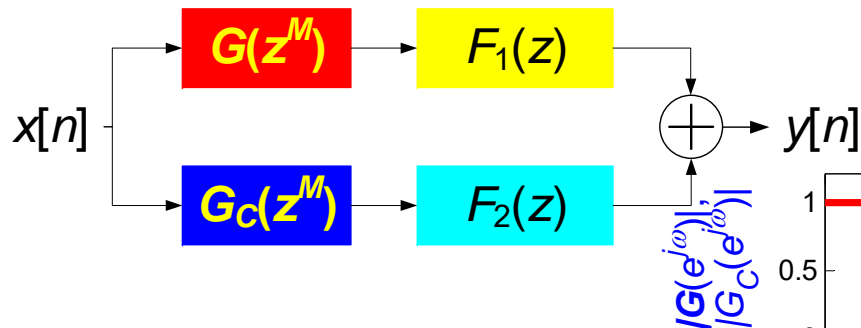
Frekvencijsko maskiranje - generalizacija



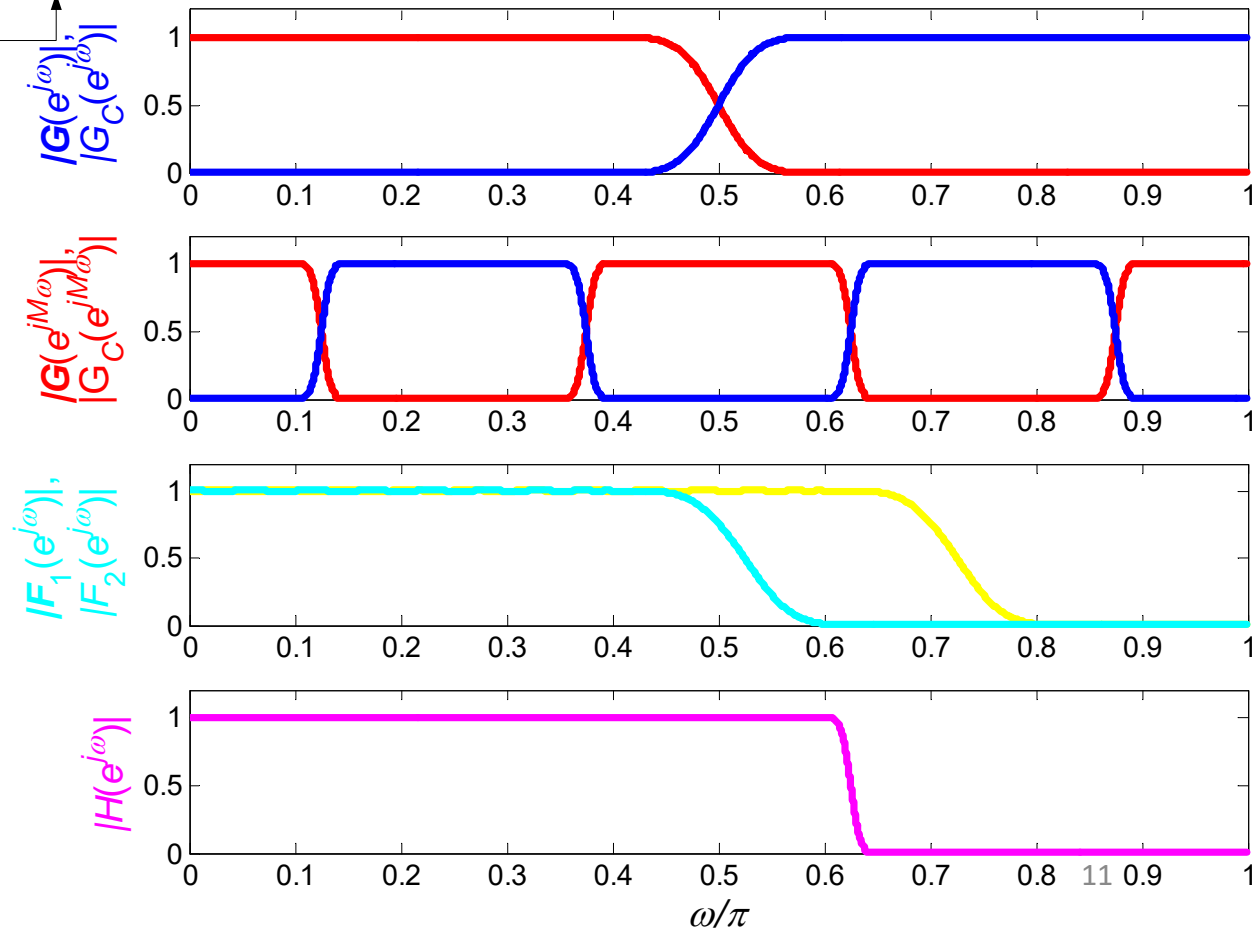
$G(z)$ i $G_c(z)$ mogu biti FIR filtri (*delay*-komplementaran filtarski par) ili IIR filtri (*all-pass* komplementaran filtarski par)

$F_1(z)$ i $F_2(z)$ moraju biti FIR linearne faze i moraju se „podesiti“ tako da budu istog reda

Frekvencijsko maskiranje – primer, *delay* komplementaran *half-band* FIR filterarski par



Filtar	ω_p	ω_s
$G(e^{j\omega})$	0.4π	0.6π
$F_1(e^{j\omega})$	0.6π	0.85π
$F_2(e^{j\omega})$	0.4π	0.65π
$H(e^{j\omega})$	0.6π	0.65π



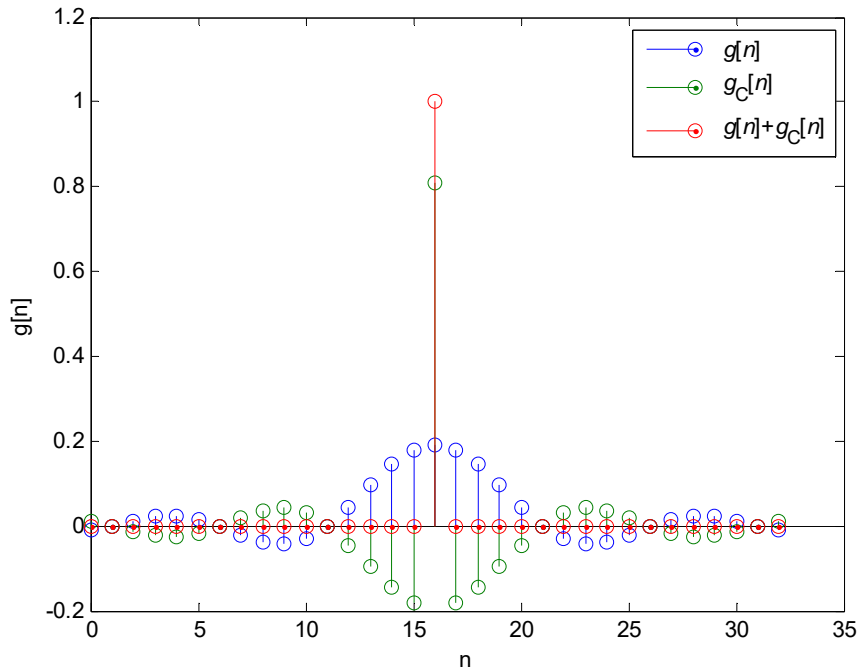
Komplementarnost

- Definiše se za filtarski par (ili grupu filtara), za nas su od interesa definicije za filtarske parove
- Filtarski par podrazumeva da se istovremeno projektuju (i realizuju) filter propusnik niskih frekvencija i filter propusnik visokih frekvencija
- Ostvarene karakteristike najčešće nisu nezavisne, a od posebnog su interesa komplementarni filtarski parovi

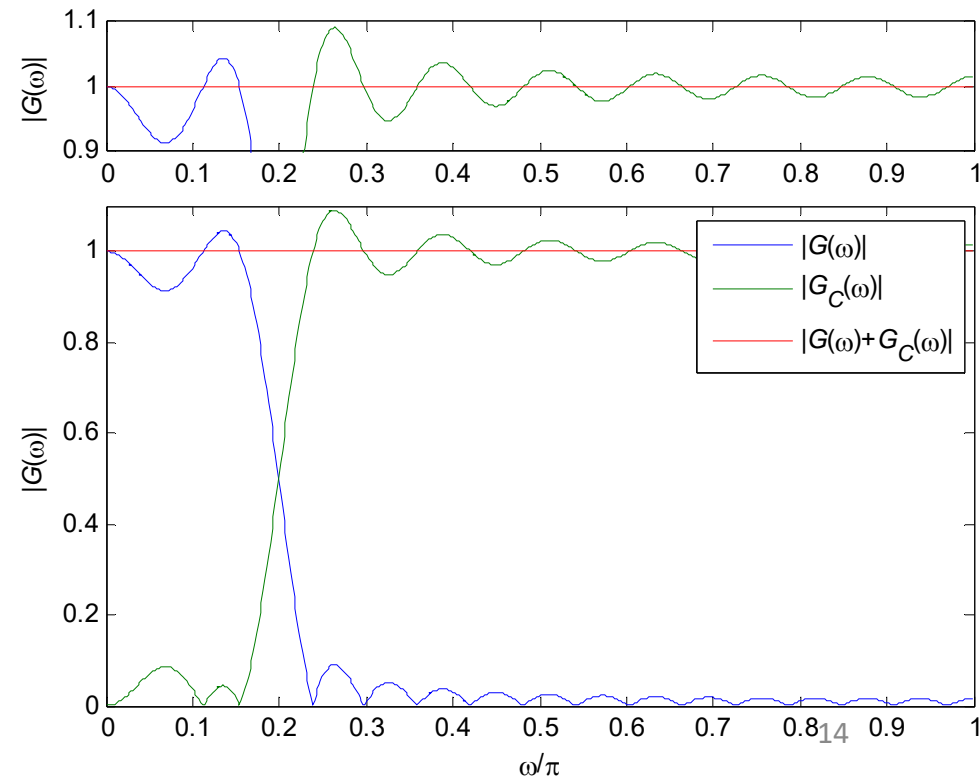
Komplementarni filtarski parovi

- *delay* komplementarnost $G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$
- *all-pass* komplementarnost $G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = A_{AP}(e^{j\omega})$
- *power* komplementarnost $|G(e^{j\omega})|^2 + |G_C(e^{j\omega})|^2 = 1$
- *magnitude* komplementarnost $|G(e^{j\omega})| + |G_C(e^{j\omega})| = 1$

Komplementarni filtarski parovi *delay* komplementarni

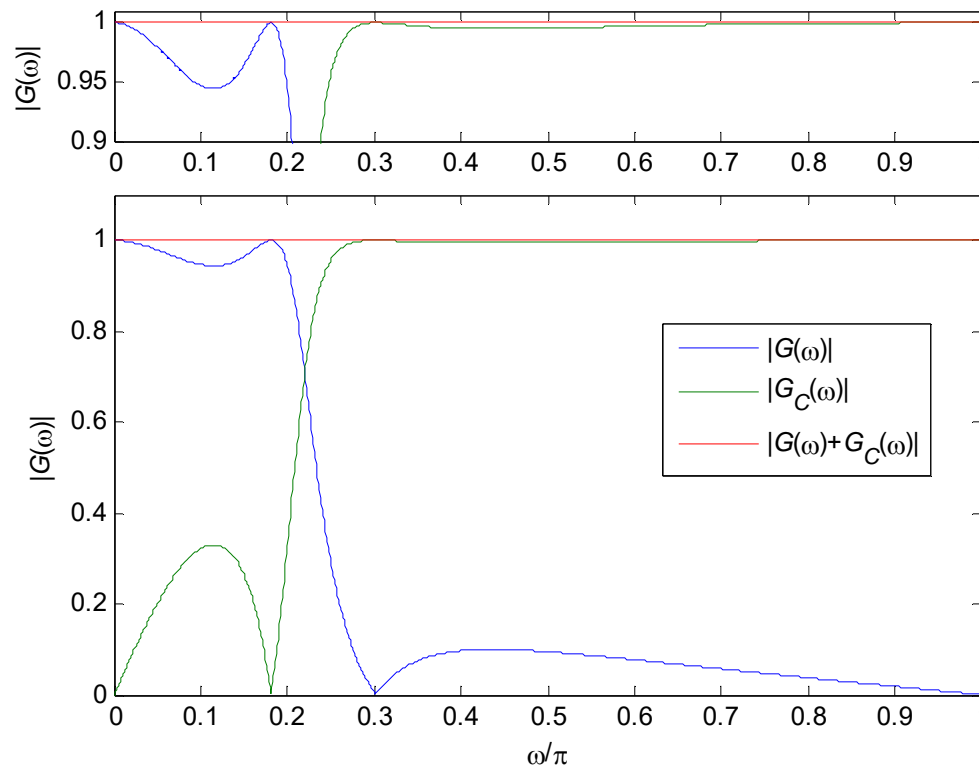


$$G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$$



Komplementarni filtarski parovi *all-pass* komplementarni

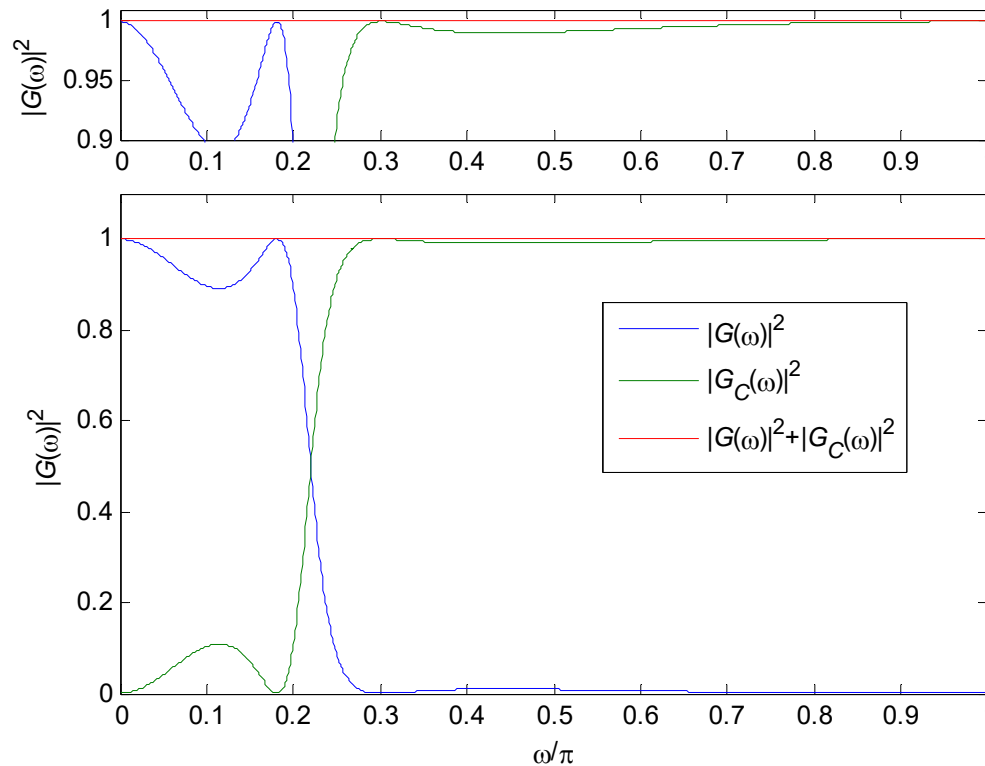
$$G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = A_{AP}(e^{j\omega})$$



Komplementarni filtarski parovi

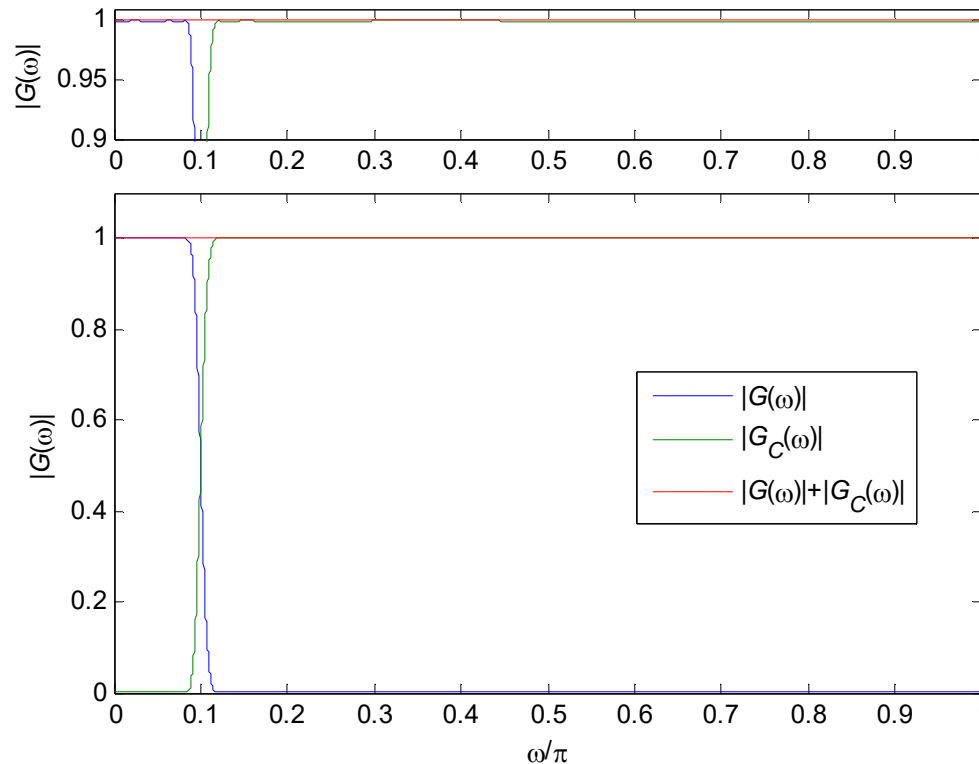
power komplementarni

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |G_C(e^{j\omega})|^2 = 1$$



Komplementarni filtarski parovi *magnitude* komplementarni

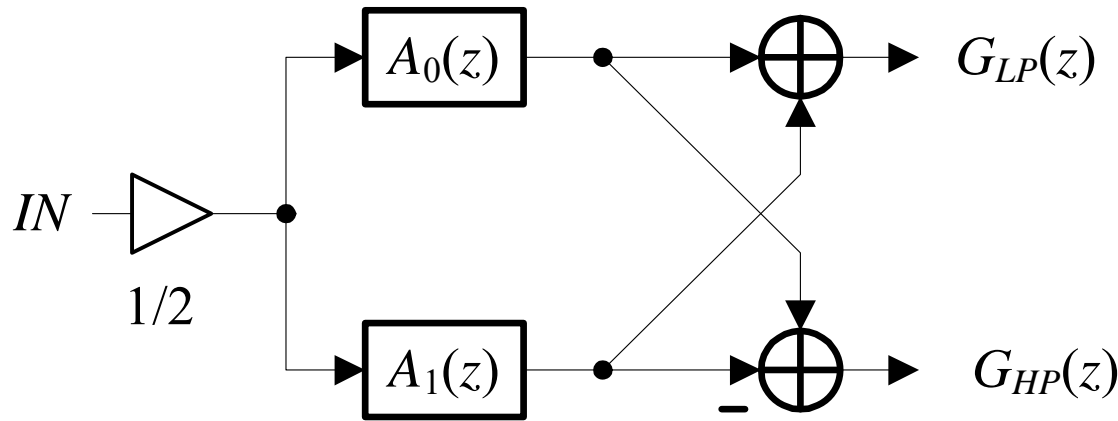
$$|G(e^{j\omega})| + |G_C(e^{j\omega})| = 1$$



Realizacija IIR filtara preko paralelne veze svepropusnika

- Svaki digitalni IIR filter neparnog reda projektovan metodom bilinearne transformacije može se realizovati kao paralelna veza filtara svepropusnika (*all-pass*)
- Ova realizacija je manje osetljiva na efekte konačne dužine kodne reči (**u propusnom opsegu**)
- Omogućava istovremenu efikasnu realizaciju i LP i HP filtra

Realizacija IIR filtara preko paralelne veze svepropusnika



$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2$$

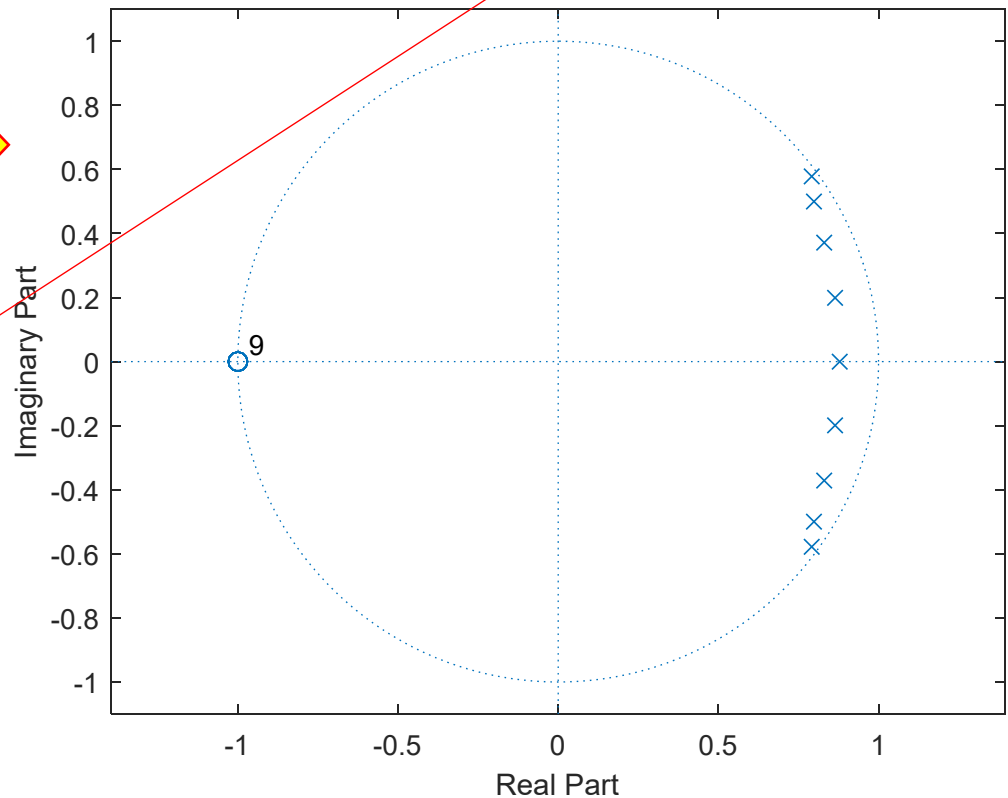
$$G_{HP}(z) = [A_0(z) - A_1(z)]/2$$

Primer

Čebiševljev filter 9 reda (red mora biti neparan)

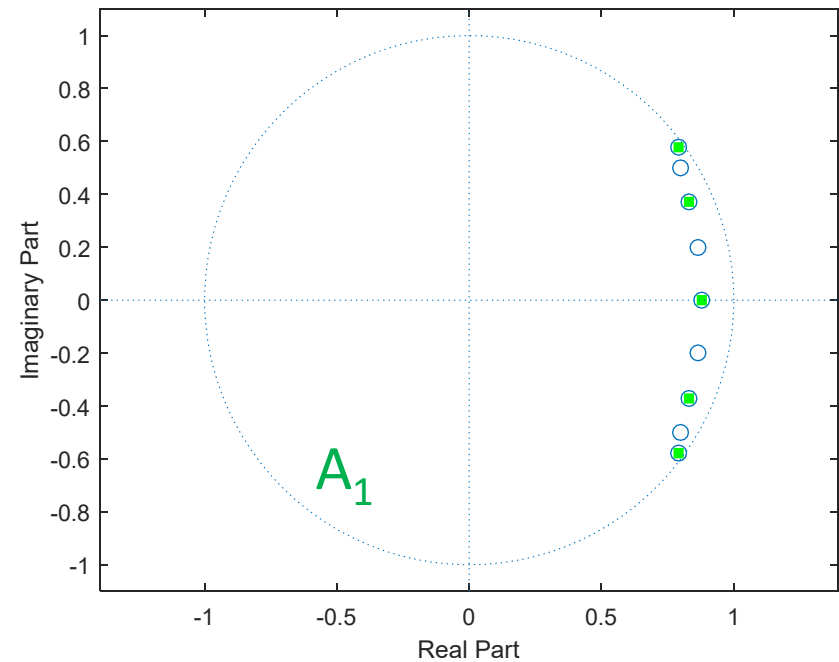
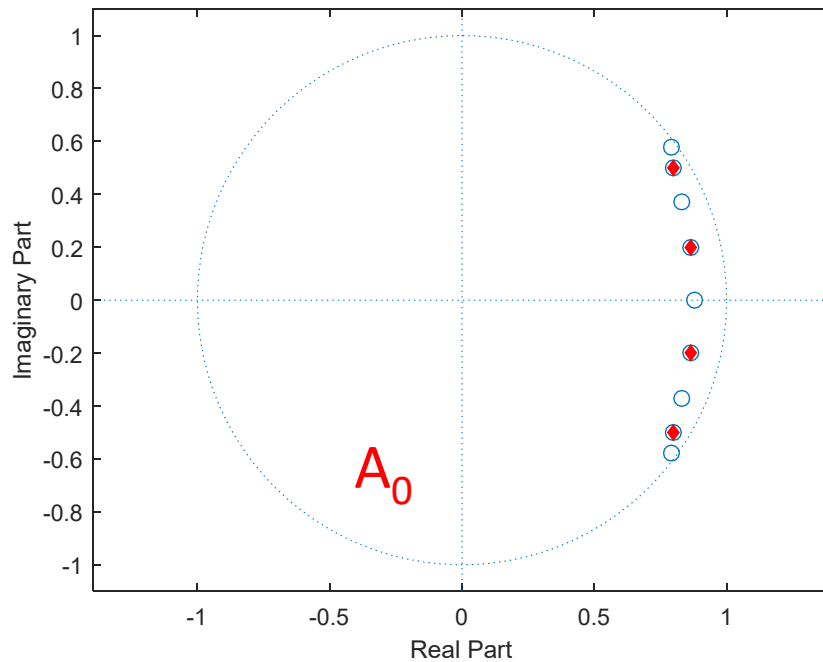
Raspored polova
i nula

```
close all
clear
wp=0.2;
ws=0.3;
rp=0.5;
rs=60;
bb=16;
[N,wn]=cheb1ord(wp,ws,rp,rs);
if N/2==round(N/2)
    N=N+1;
end;
[b,a]=cheby1(N,rp,wn);
[z,p,k]=cheby1(N,rp,wn);
[H,w]=freqz(b,a,1000);
figure,zplane(z,p);
```



Primer - IIR filter realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra

All-pass grane se formiraju tako što se polovi podele u dve grupe



```
[ps,ind]=sort(abs(p));
p1(1)=p(ind(1));
p0=[];
```

```
for br=1:(N-1)/2
    if br/2~=round(br/2)
        p0=[p0;p(ind(2*(br-1)+2:2*(br-1)+3))];
    else
        p1=[p1;p(ind(2*(br-1)+2:2*(br-1)+3))];
    end;
end;
```

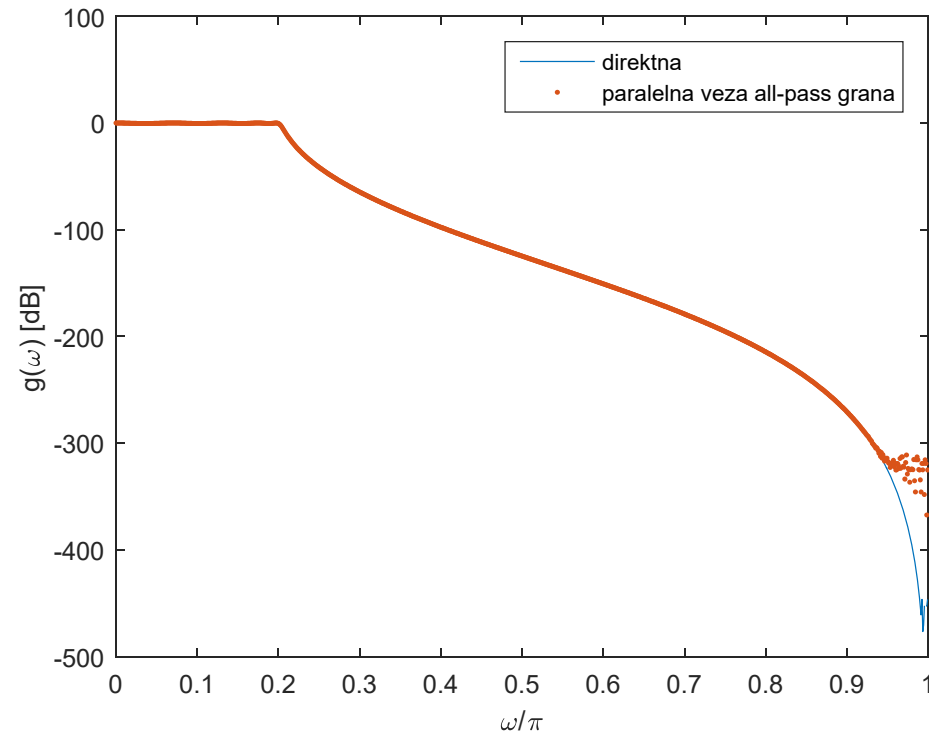
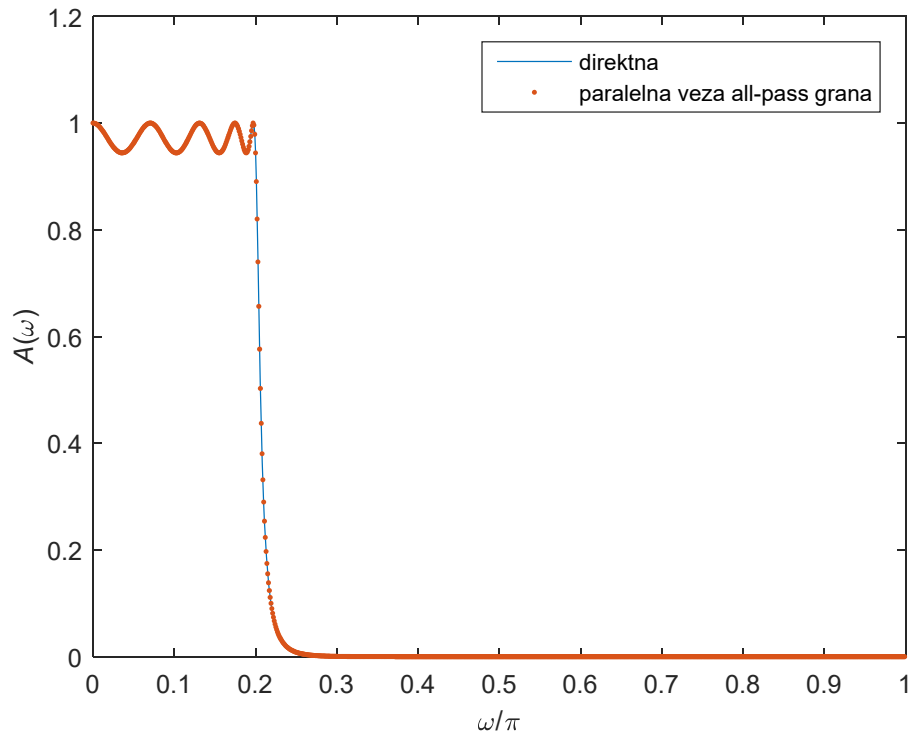
```
figure,zplane(p,p0);
figure,zplane(p,p1);
```

Primer - IIR filter realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra

- *All-pass* grane se formiraju tako što se polovi podele u dve grupe
- Od svake grupe polova formira se polinom u imeniocu funkcije prenosa odgovarajuće grane
- Polinom u brojiocu formira se tako da bude zadovoljen uslov *all-pass*

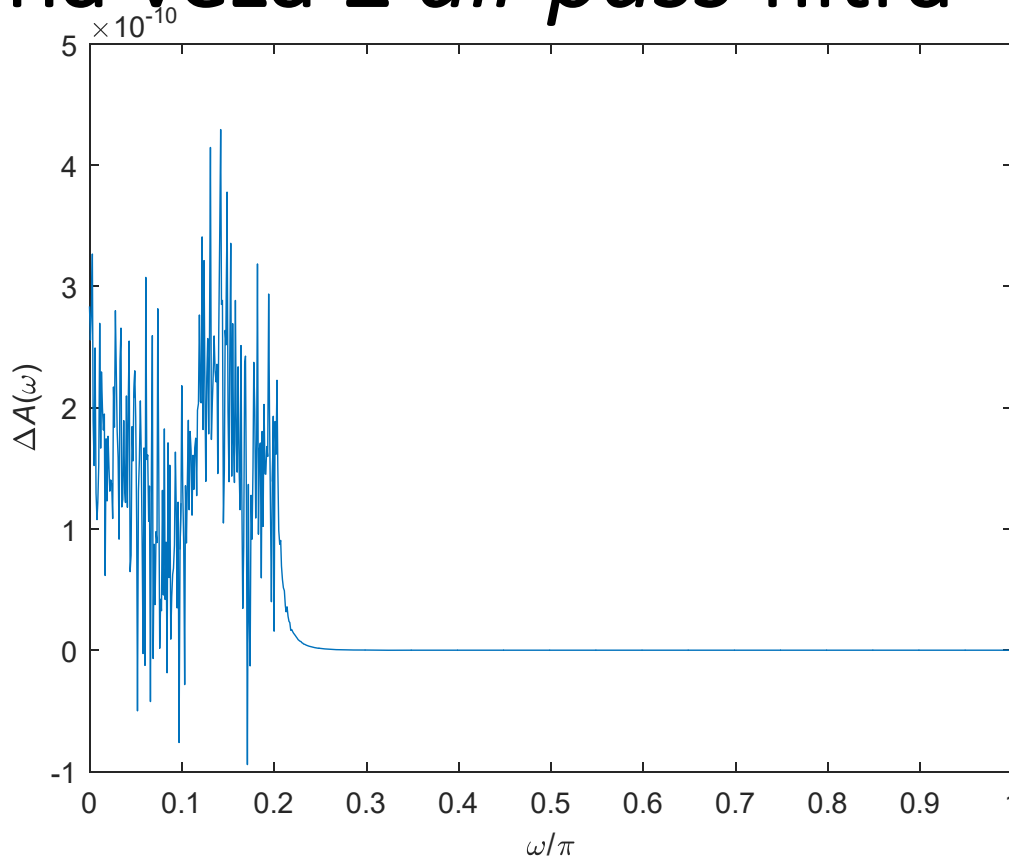
```
a0=poly(p0);  
b0=flipr(a0);  
a1=poly(p1);  
b1=flipr(a1);  
[A0,w]=freqz(b0,a0,1000);  
[A1,w]=freqz(b1,a1,1000);
```

Primer - IIR filter realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra



```
figure,plot(w/pi,abs(H),w/pi,abs(A0+A1)/2, '.');
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('{itA}(\omega)'); legend('direktna','paralelna veza all-pass grana');
figure,plot(w/pi,20*log10(abs(H)),w/pi,20*log10(abs(A0+A1)/2), '.');
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('g(\omega) [dB]'); legend('direktna','paralelna veza all-pass grana');
```

Primer - IIR filter realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra



Razlika implementacije funkcijom filter i implementacije preko paralelne veze *all-pass* filtara

Primer - IIR filter realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra

$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{[A_0(e^{j\omega}) + A_1(e^{j\omega})]}{2}$$

$$A_0(e^{j\omega}) = e^{j\varphi_0(\omega)} \quad A_1(e^{j\omega}) = e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (e^{j\varphi_0(\omega)} \pm e^{j\varphi_1(\omega)})$$

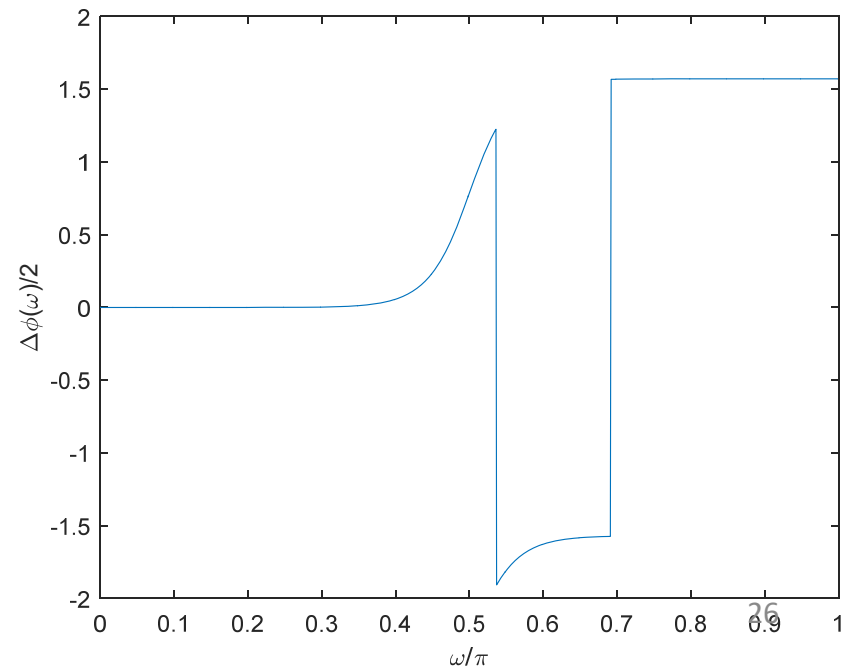
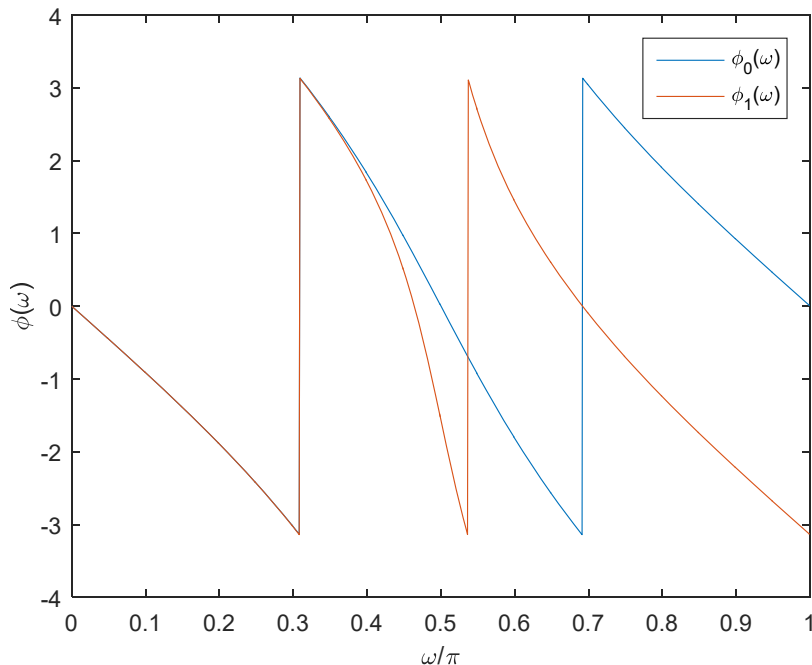
$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega)}{2}} e^{j\frac{\varphi_1(\omega)}{2}} \left(e^{j\left(\frac{\varphi_0(\omega)}{2} - \frac{\varphi_1(\omega)}{2}\right)} \pm e^{j\left(-\frac{\varphi_0(\omega)}{2} + \frac{\varphi_1(\omega)}{2}\right)} \right)$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}}}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

Primer - IIR filtar realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}}}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

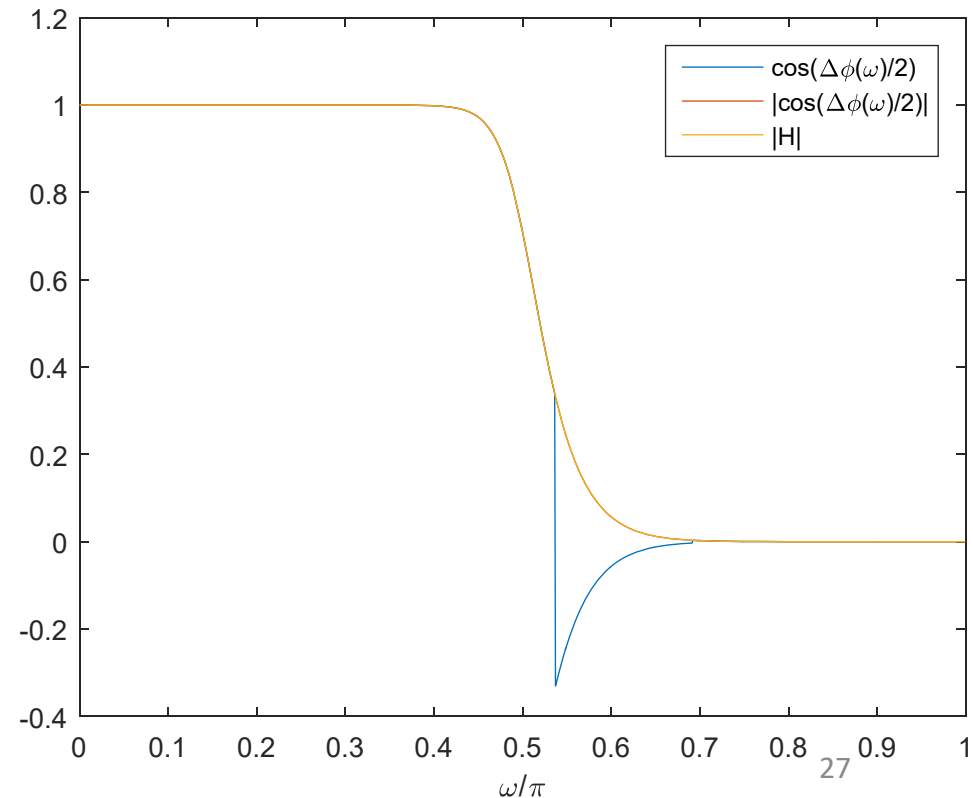
$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}\right) e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$



Primer - IIR filter realizovan kao paralelna veza 2 *all-pass* filtra

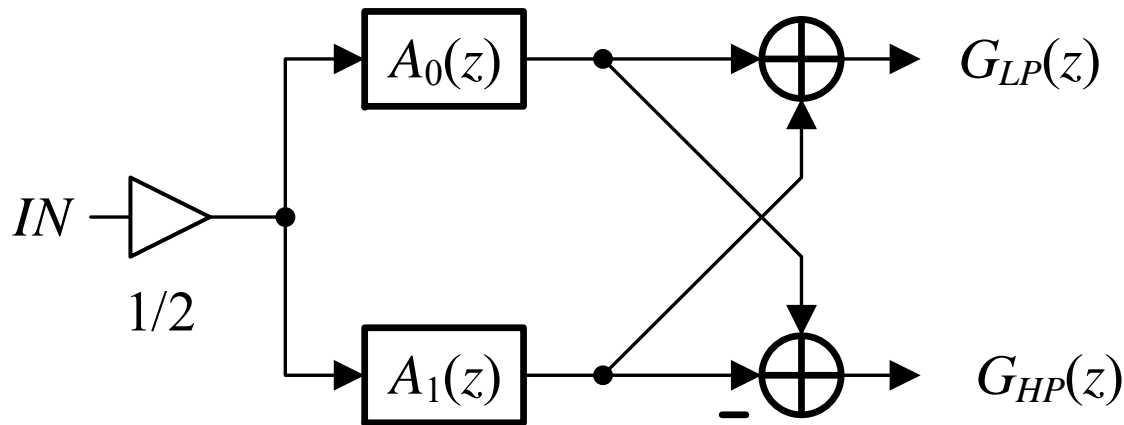
$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\varphi_0(\omega)-\varphi_1(\omega)}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0(\omega)-\varphi_1(\omega)}{2}}}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega)+\varphi_1(\omega)}{2}}$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{\varphi_0(\omega)-\varphi_1(\omega)}{2}\right) e^{j\frac{\varphi_0(\omega)+\varphi_1(\omega)}{2}}$$

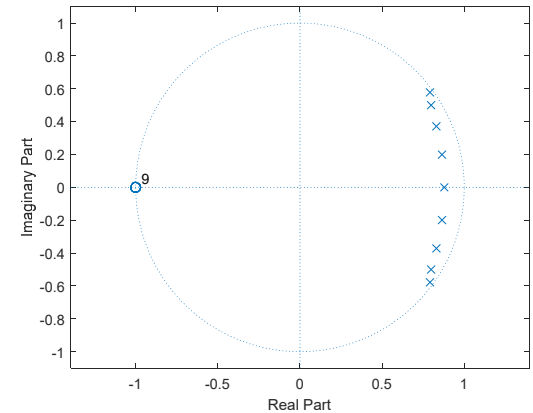


Realizacija preko sekcija nižeg reda

$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2$$



$$G_{HP}(z) = [A_0(z) - A_1(z)]/2$$



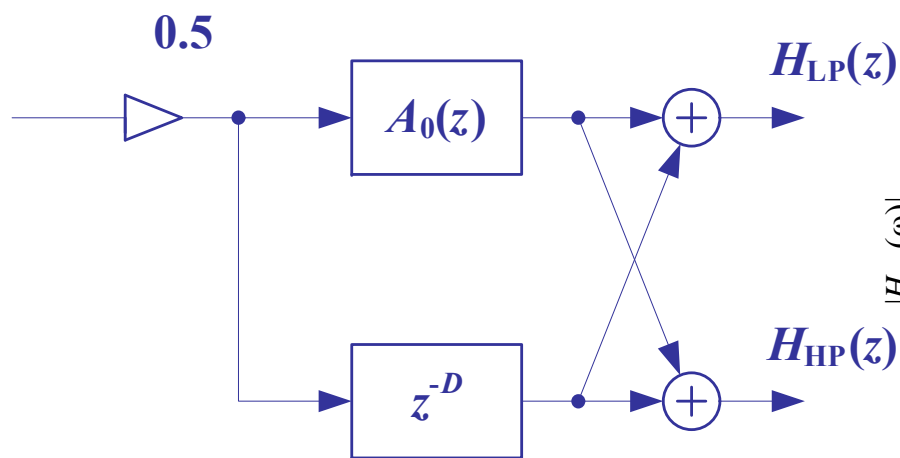
r_l – moduli
polova

$$\beta_l = (r_l)^2, \beta_l < \beta_{l+1}$$

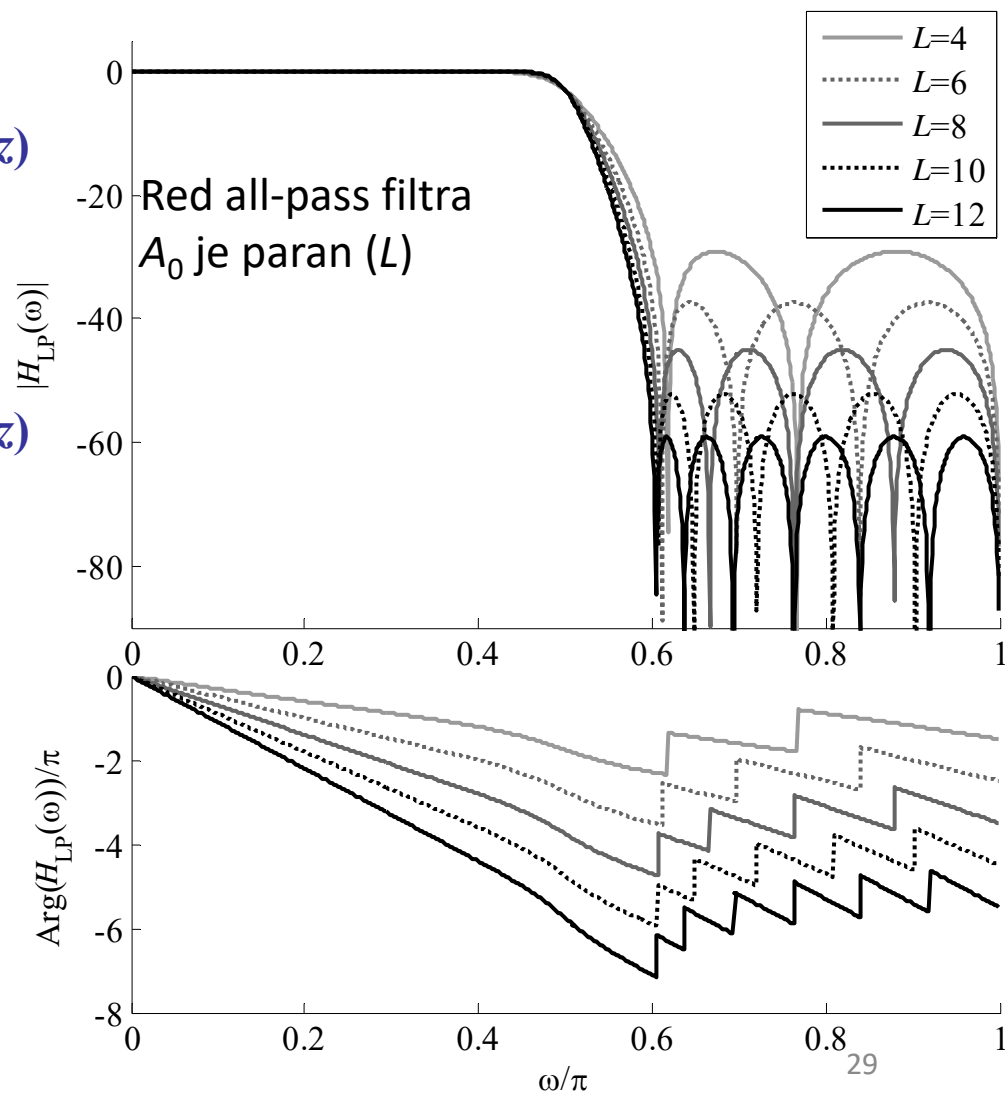
$$A_0(z) = \prod_{l=2,4,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + \beta_l z^{-2}}$$

$$A_1(z) = \frac{\alpha_1 + z^{-1}}{1 + \alpha_1 z^{-1}} \prod_{l=3,5,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + \beta_l z^{-2}}$$

IIR filtri približno linearne faze



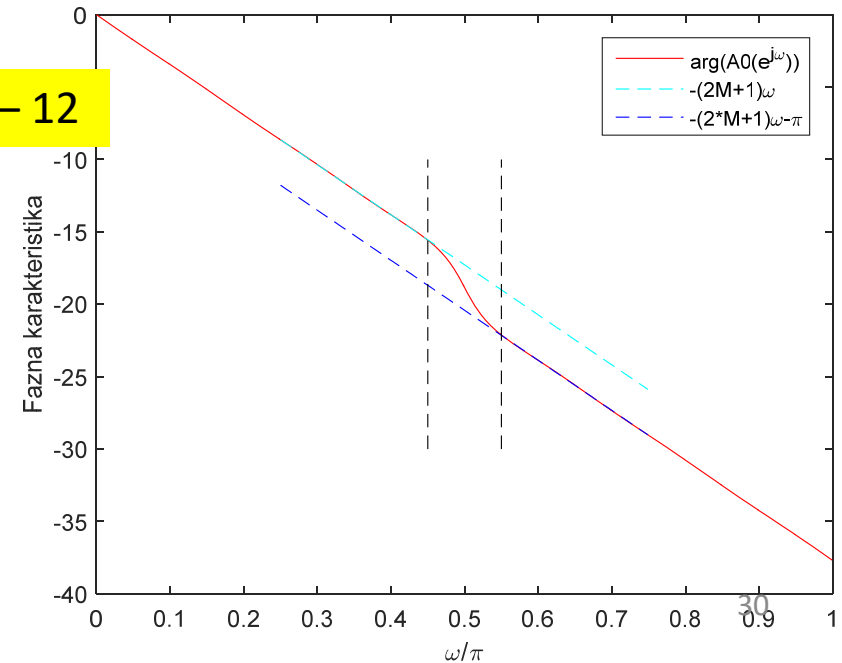
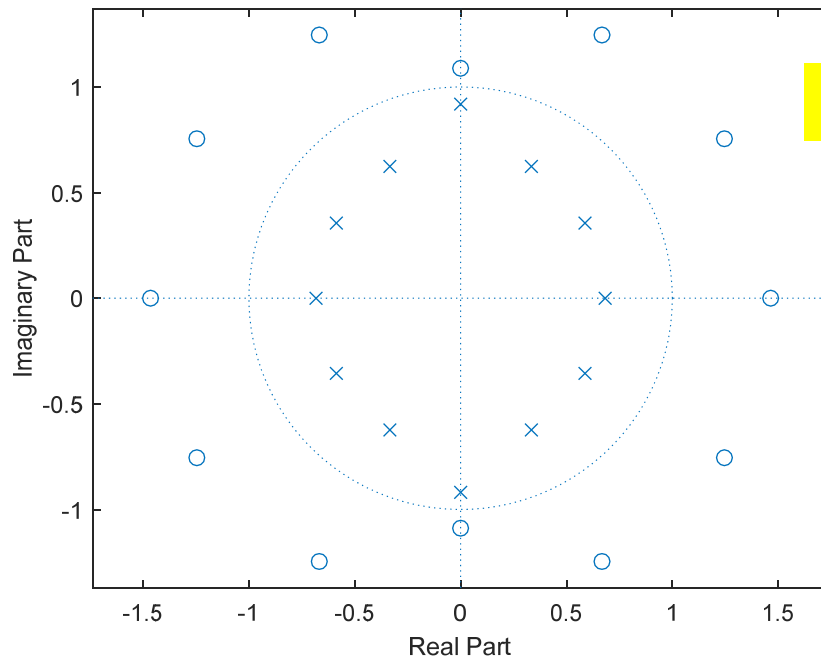
Paralelna veza *all-pass* filtra i kašnjenja (koje je trivijalna *all-pass* sekcija), pa je ovo specijalan slučaj filtra realizovanog kao paralelna veza dva svepropusnika



IIR filtri približno linearne faze

$$A_0(z) = \left(\prod_{s=1}^{S_2} \frac{a_{2,s} + z^{-2}}{1 + a_{2,s}z^{-2}} \right) \left(\prod_{s=S_2+1}^{S_2+S_4} \frac{a_{4,s} + a_{2,s}z^{-2} + z^{-4}}{1 + a_{2,s}z^{-2} + a_{4,s}z^{-4}} \right)$$

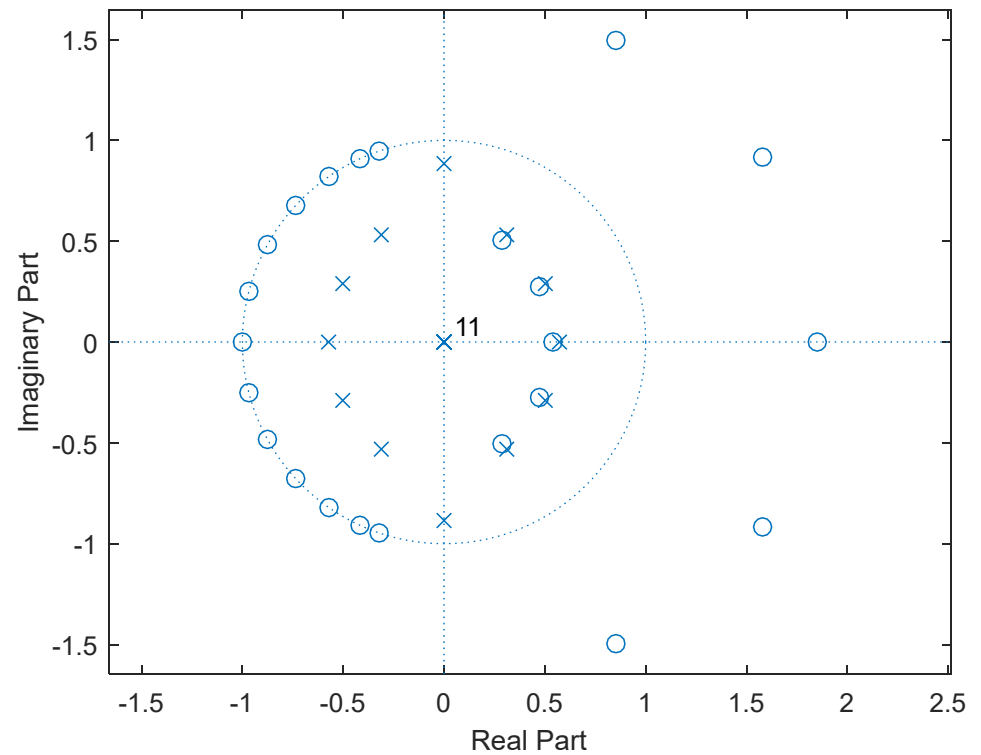
A_0 se projektuje optimizacionim metodama, tako da ima približno linearnu fazu. U propusnom delu H_{LP} filtra A_0 treba da je u fazi sa kašnjenjem z^{-D} , odnosno fazna karakteritika se aproksimira prema $-D\omega$ a u nepropusnom prema $-D\omega - \pi$.



IIR filtri približno linearne faze

Red A_0 – 12
 Kašnjenje – 11
 Ukupan red filtra 23

Raspored nula i polova $H_{LP}(z)$



Komplementarnost

$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = \frac{[A_0(e^{j\omega}) \pm A_1(e^{j\omega})]}{2}$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) + G_{HP}(e^{j\omega}) = A_0(e^{j\omega})$$

$$|G_{LP}(e^{j\omega})| = \left| \cos\left(\frac{\Delta\varphi(\omega)}{2}\right) \right|$$

$$|G_{HP}(e^{j\omega})| = \left| \sin\left(\frac{\Delta\varphi(\omega)}{2}\right) \right|$$

$$|G_{LP}(e^{j\omega})|^2 + |G_{HP}(e^{j\omega})|^2 = 1$$



Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- ukoliko se IIR filter realizuje tehnikom frekvencijskog maskiranja, ukupan broj računskih operacija u odnosu na direktno projektovan IIR filter približno iste amplitudske karakteristike se povećava
- s druge strane se, međutim, mogu prevazići problemi izbora frekvencije odabiranja
- zbog manje selektivnosti i nešto nižeg reda filtra u prvom stepenu realizacije osetljivost cele strukture je manja
- u specijalnom slučaju, kada je polazni model filter IIR filter približno linearne fazne karakteristike, mogu se dobiti uštede u pogledu složenosti filtra slične kao kada je model filter FIR tipa

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

- Projektuje se IIR filter uzane prelazne zone, direktnim projektovanjem kao IIR Čebiševljev filter prve vrste

Parametar	Vrednost
Granica propusnog opsega - ω_p	0.21π
Granica nepropusnog opsega - ω_s	0.215π
Dozvoljeno odstupanje u propusnom opsegu - r_p	0.01 dB
Zahtevano slabljenje u nepropusnom opsegu - r_s	60 dB

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

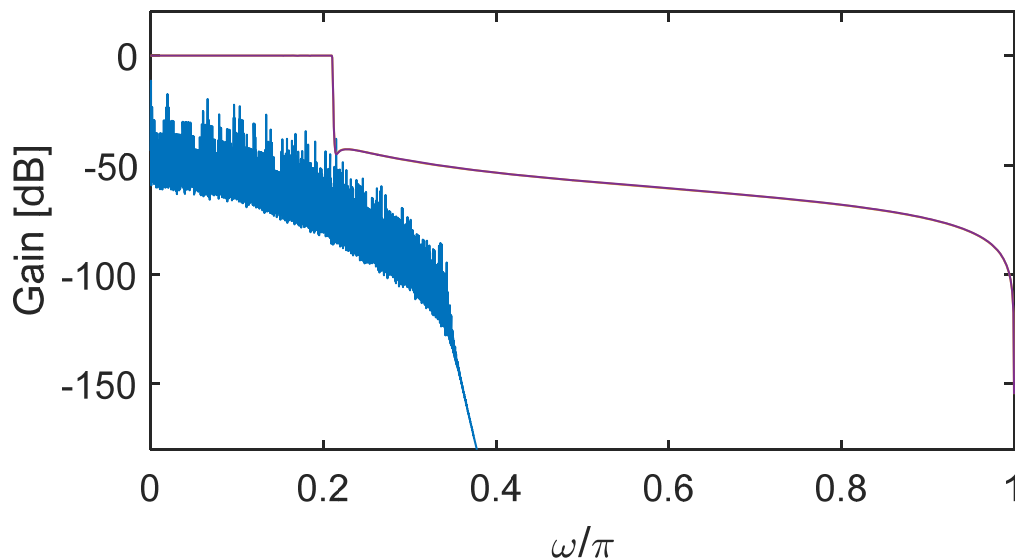
```
close all
clear
rs=60;
deltas=10^-(rs/20);
deltap=1-sqrt(1-deltas^2);
rp=-20*log10(1-deltap);
rpdd=0.01;
wp=0.21*pi; % granicna frekvencija propusnog opsega
rezultujuceg filtra
ws=0.215*pi; % granicna frekvencija nepropusnog opsega
rezultujuceg filtra
```

Zadavanje gabarita za
standardni dizajn u
MATLAB-u

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

```
[Ndd,wndd]=cheblord(wp/pi,ws/pi,rpdd,rs);
if rem(Ndd,2)==0 % iir filter mora biti neparnog reda
    Ndd=Ndd+1;
end
[bdd,add]=cheby1(Ndd,rpdd,wndd);
[zdd,pdd,kdd]=cheby1(Ndd,rpdd,wndd);
```



—	MATLAB dir
—	Kvantizovani koeficijenti dir
—	MATLAB pv
—	Kvantizovani koeficijenti pv

Filtar je previše selektivan da bi mogao biti projektovan kao Čebiševljev prve vrste, čak i u realizaciji preko paralelne veze svepropusnika (pv)

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

```
%% Frekvencijsko maskiranje - parametri
M=16;
m=floor(wp*M/2/pi);
if ws*M-2*m*pi<pi && m>0 % dizajn tipa 1
    wppt=wp*M-2*m*pi; % granicna frekvencija propusnog opsega
prototip filtra
    wspt=ws*M-2*m*pi; % granicna frekvencija nepropusnog opsega
prototip filtra
    wpf1=(2*m*pi+wppt)/M; % granicna frekvencija propusnog opsega
maskirajuceg filtra F1
    wsf1=(2*(m+1)*pi-wspt)/M; % granicna frekvencija nepropusnog
opsega maskirajuceg filtra F1
    wpf2=(2*m*pi-wppt)/M; % granicna frekvencija propusnog opsega
maskirajuceg filtra F2
    wsf2=(2*m*pi+wspt)/M; % granicna frekvencija nepropusnog opsega
maskirajuceg filtra F2
else
```

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

Za detalje oko izbora parametara, pogledati *

```

m=ceil(ws*M/2/pi); % dizajn tipa 2
  if 2*m*pi-wp*M<pi
      wppt=2*m*pi-ws*M; % granicna frekvencija propusnog opsega
      prototip filtra
      wspt=2*m*pi-wp*M; % granicna frekvencija nepropusnog opsega
      prototip filtra
      wpf1=(2*(m-1)*pi+wspt)/M; % granicna frekvencija propusnog
      opsega maskirajuceg filtra F1
      wsf1=(2*m*pi-wppt)/M; % granicna frekvencija nepropusnog
      opsega maskirajuceg filtra F1
      wpf2=(2*m*pi-wspt)/M; % granicna frekvencija propusnog
      opsega maskirajuceg filtra F2
      wsf2=(2*m*pi+wppt)/M; % granicna frekvencija nepropusnog
      opsega maskirajuceg filtra F2
  else
      pogresni_parametri=1;
  end
end
  *Yong Lim, "Frequency-response masking approach for the synthesis of
  sharp linear phase digital filters," in IEEE Transactions on Circuits and
  Systems, vol. 33, no. 4, pp. 357-364, April 1986.

```

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

```
%% Frekvencijsko maskiranje - prototip filter
[Npt,wnpt]=cheblord(wppt/pi,wspt/pi,rp,rs);
if rem(Npt,2)==0 % iir filter mora biti neparnog reda
    Npt=Npt+1;
end
```

```
G_M=(A0ptMuk+A1ptMuk)/2;
```

```
Gc_M=(A0ptMuk-A1ptMuk)/2;
```

```
G_Mqq=(A0ptMukqq+A1ptMukqq)/2;
```

```
Gc_Mqq=(A0ptMukqq-A1ptMukqq)/2;
```

Simulira se i kvantizacija
koeficijenata na određenu
dužinu kodne reči

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

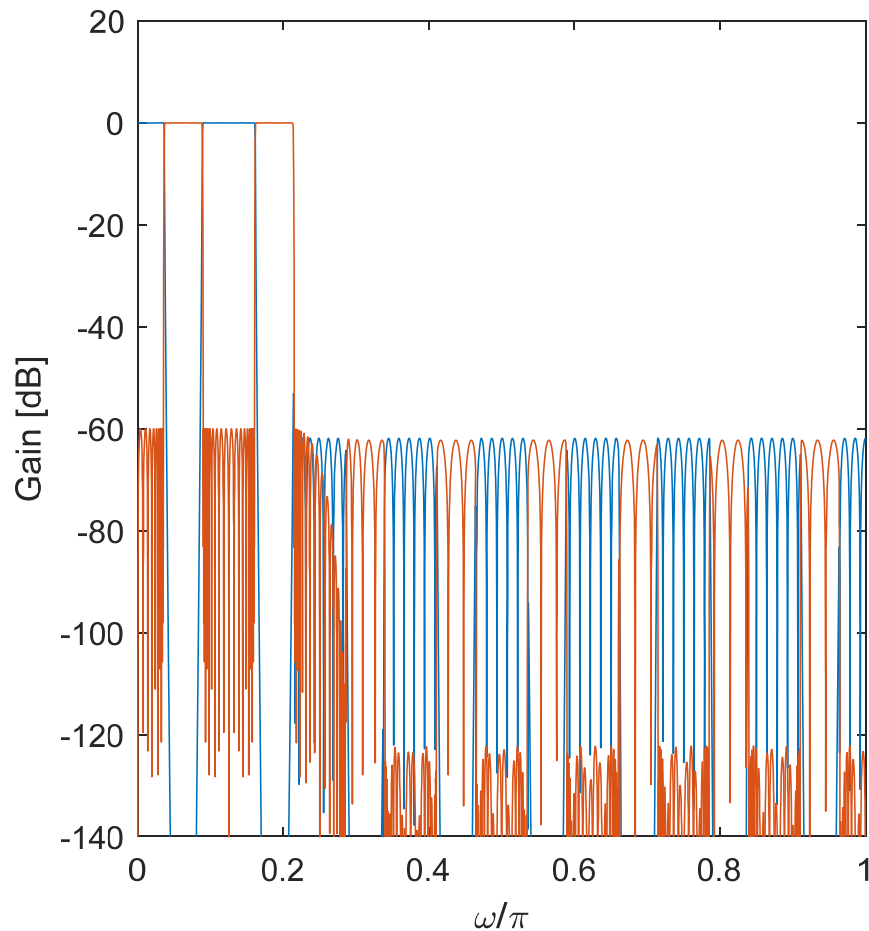
```
% Frekvencijsko maskiranje - maskirajuæi filtri
[N1,ff1,aa1,tf1]=firpmord([wfp1 wsf1]/pi,[1 0],[0.5*(1-10^(-rpdd/20)) 0.8*deltas]);
[N2,ff2,aa2,tf2]=firpmord([wfp2 wsf2]/pi,[1 0],[0.5*(1-10^(-rpdd/20)) 0.8*deltas]);

[F1,w]=freqz(f1,1,broj_tacaka_f_kk);
[F2,w]=freqz(f2,1,broj_tacaka_f_kk);
```

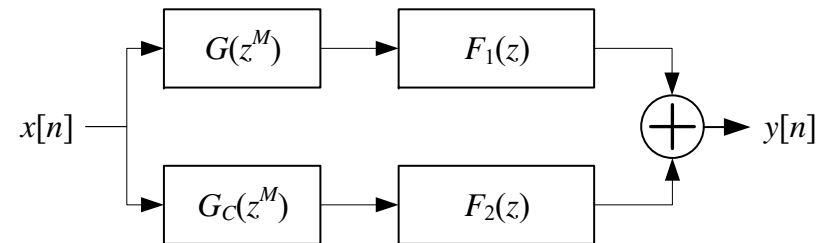
Maskirajuæi filtri su FIR filtri
linearne faze

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

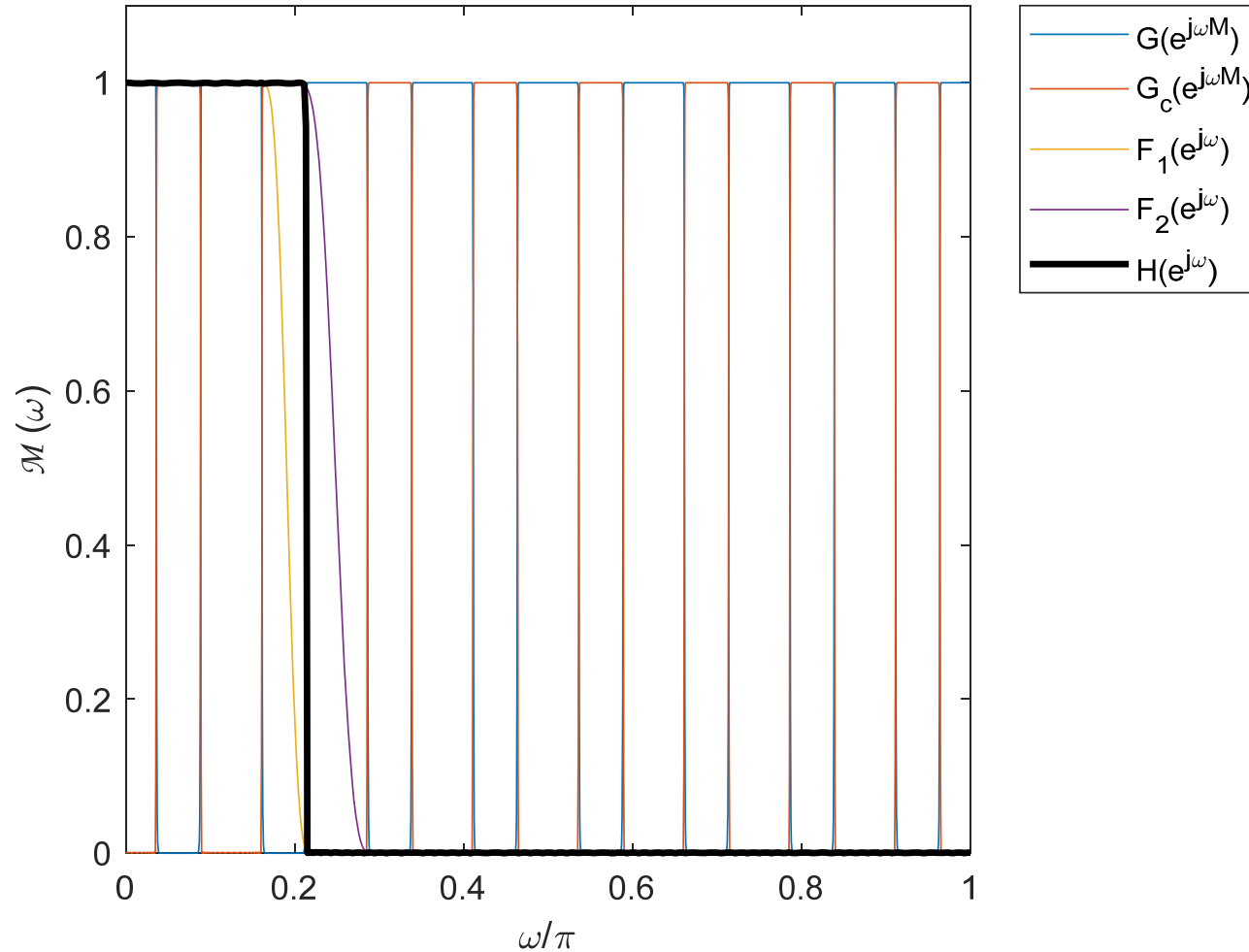


$G(e^{j\omega M}) * F_1(e^{j\omega})$
 $G_c(e^{j\omega M}) * F_2(e^{j\omega})$



Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri


- primer



Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

Filtar	Red_filtra
{ 'Direktan IIR' }	{ '49' }
{ 'Direktan IIR - All Pass A_0' }	{ '24' }
{ 'Direktan IIR - All Pass A_1' }	{ '25' }
{ 'Prototip IIR' }	{ '21' }
{ 'Prototip IIR - All Pass A_0' }	{ '10' }
{ 'Prototip IIR - All Pass A_1' }	{ '11' }
{ 'Maskirajuci F_1' }	{ '140' }
{ 'Maskirajuci F_2' }	{ '94' }

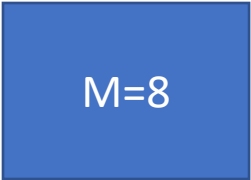


M=16

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer

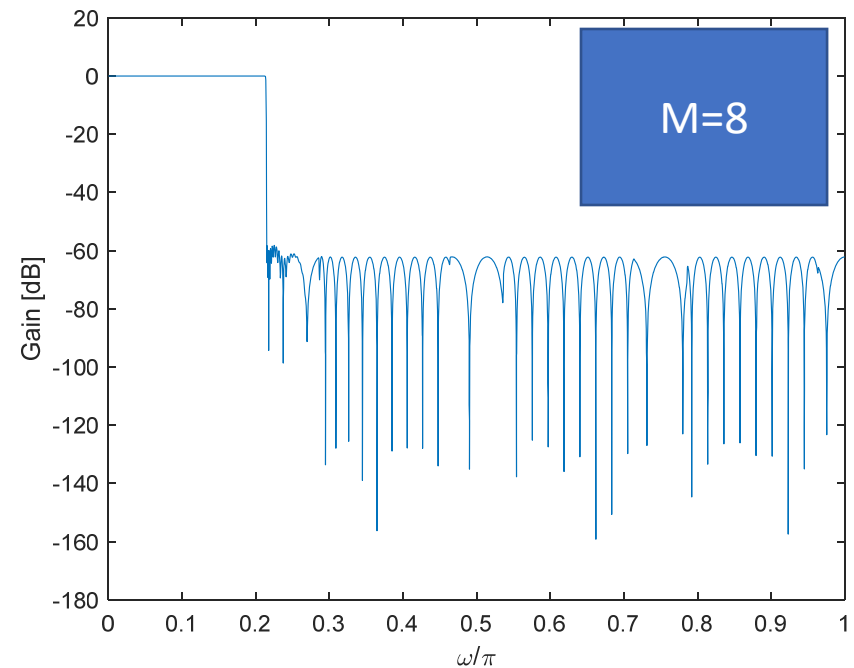
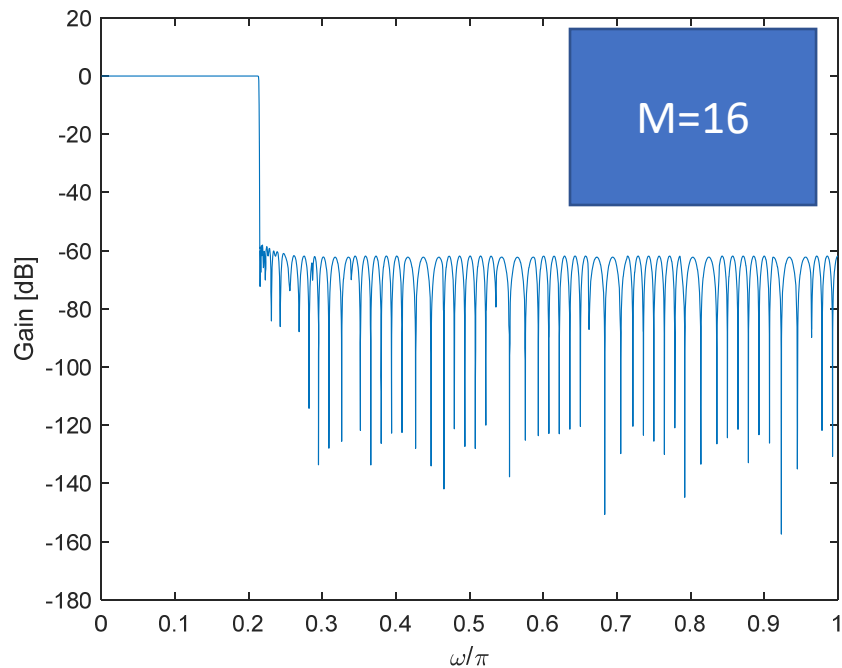
Filtar	Red_filtra
{ 'Direktan IIR' }	{ '49' }
{ 'Direktan IIR - All Pass A_0' }	{ '24' }
{ 'Direktan IIR - All Pass A_1' }	{ '25' }
{ 'Prototip IIR' }	{ '27' }
{ 'Prototip IIR - All Pass A_0' }	{ '14' }
{ 'Prototip IIR - All Pass A_1' }	{ '13' }
{ 'Maskirajuci F_1' }	{ '40' }
{ 'Maskirajuci F_2' }	{ '94' }



M=8

Frekvencijsko maskiranje – IIR filtri

- primer



Detaljno urađen primer:

[http://telit.etf.rs/predmeti/sistemi_sa_vise_brzina_\(13M031SVB\)/Tehnika_frekvencijskog_maskiranja_primer_IIR.pdf](http://telit.etf.rs/predmeti/sistemi_sa_vise_brzina_(13M031SVB)/Tehnika_frekvencijskog_maskiranja_primer_IIR.pdf)