



BENEFIT

Boosting the telecommunications
engineer profile to meet modern
society and industry needs

Sistemi sa više brzina (13M031SVB)

Deo 5

Master studije

Jelena Čertić, Katedra za Telekomunikacije,
Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Digitalne banke filtara

Metode obrade signala zasnovane na primeni banaka digitalnih filtara našle su značajnu primenu u različitim oblastima kao što su:

- obrada slike,
- obrada medicinskih signala i slike,
- obrada audio signala,
- tehnike za otklanjanje šuma,
- kodovanje govora,
- skremblovanje,
- kompresija slike,
- adaptivna obrada signala,
- implementacija *wavelet* transformacije,
- modulacione tehnike sa više nosilaca,
- frekvencijsko multipleksiranje signala.

Digitalne banke filtara

- Osnovno svojstvo banke digitalnih filtara je da u frekvencijskom domenu dekomponuje signal na dva ili više podopsega ili da od dva ili više različitih signala formira kompozitni signal
- S obzirom na to da pri dekompoziciji signala na podopsege signal u svakom opsegu postaje frekvencijski ograničen, efikasne realizacije filtarskih banaka najčešće **podrazumevaju i promenu frekvencije odabiranja, pa samim tim spadaju u sisteme sa više brzina**

Banke filtara

Prema funkciji koju obavljaju banke filtara se dele na:

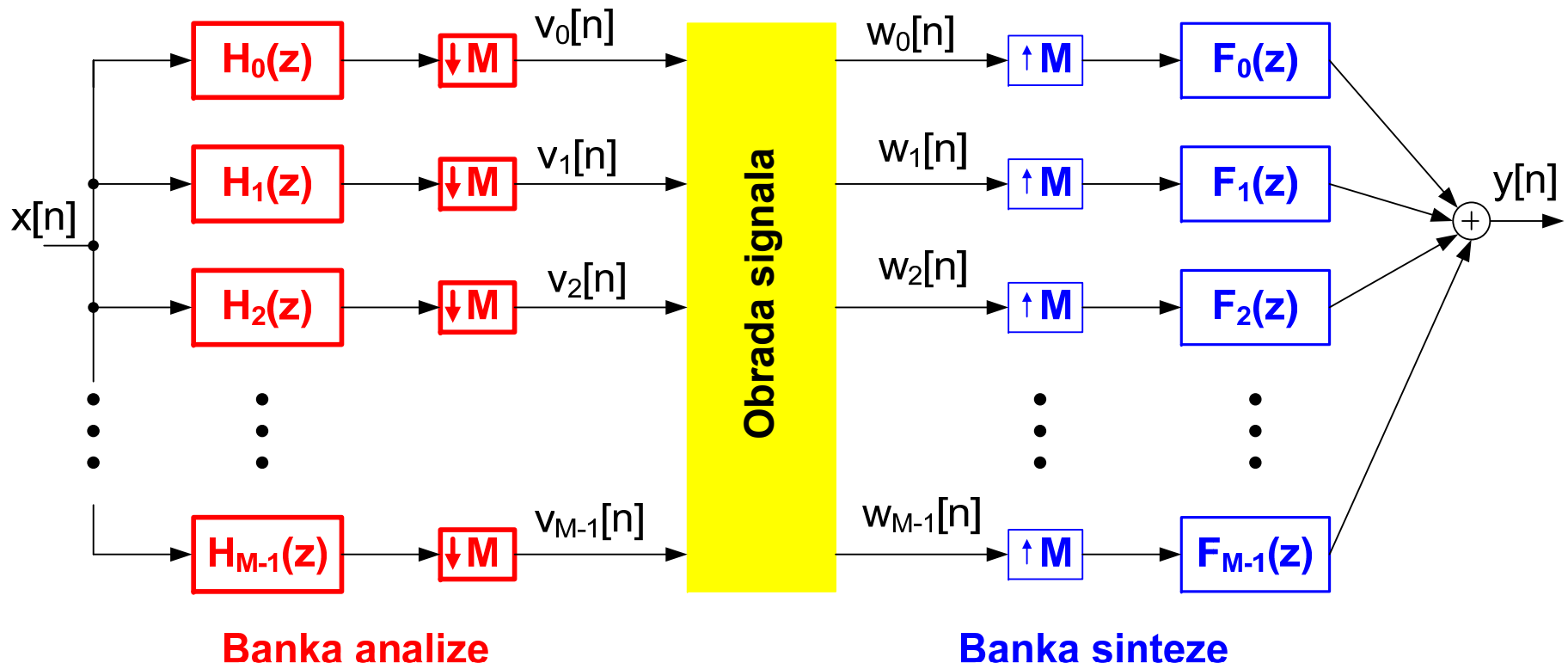
- **Banke analize**

Banka analize je sistem sa jednim ulazom i dva ili više izlaza. Njena funkcija je da spektar ulaznog signala razdvoji na dva ili više podopsega

- **Banke sinteze**

Banka sinteze je sistem sa dva ili više ulaza i jednim izlazom. Njen funkcija se sastoji u tome da od dva ili više ulaznih signala formira kompozitni signal na svom izlazu

Blok šema sistema za obradu signala primenom banki filtara



Banka na slici je M -kanalna (ima M kanala, deli frekvencijski opseg od 0 do π na M podopsega), uniformna (širine podopsega su jednake), sa maksimalnom decimacijom (u svakom kanalu se „spušta“ frekvencija odabiranja M puta)

Banke filtara - podele

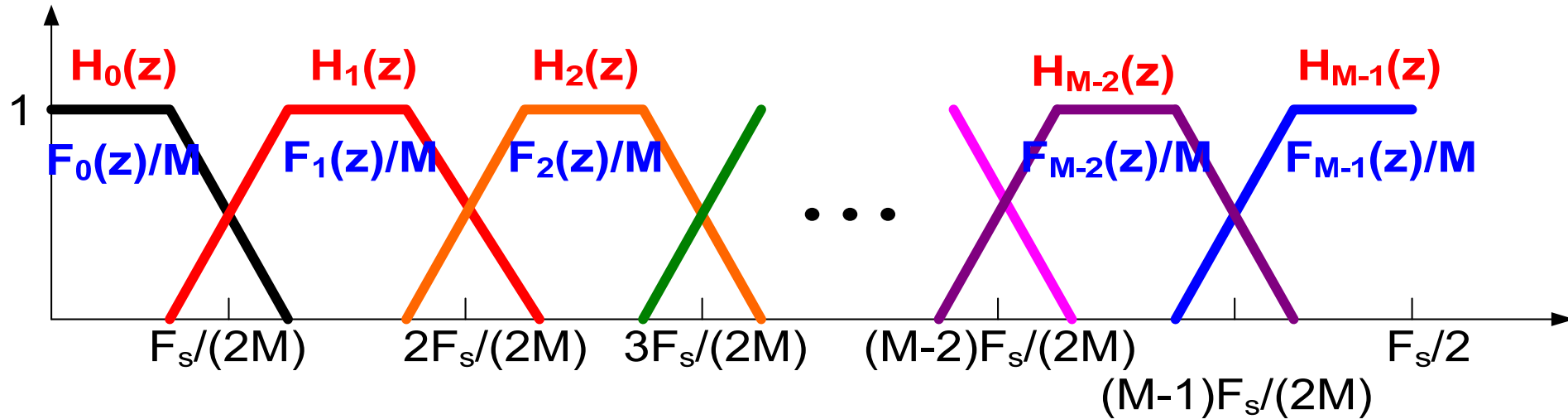
- Digitalne filtri u filtarskim bankama mogu biti sa realnim ili sa kompleksnim koeficijentima
- Za sisteme sa realnim koeficijentima „ceo opseg“ frekvencija je od 0 do π
- Za sisteme sa kompleksnim koeficijentima „ceo opseg“ frekvencija je od 0 do 2π

Ukoliko nije drugačije naglašeno, pretpostavljaćemo da su sistemi sa realnim koeficijentima

Banke filtara - podele

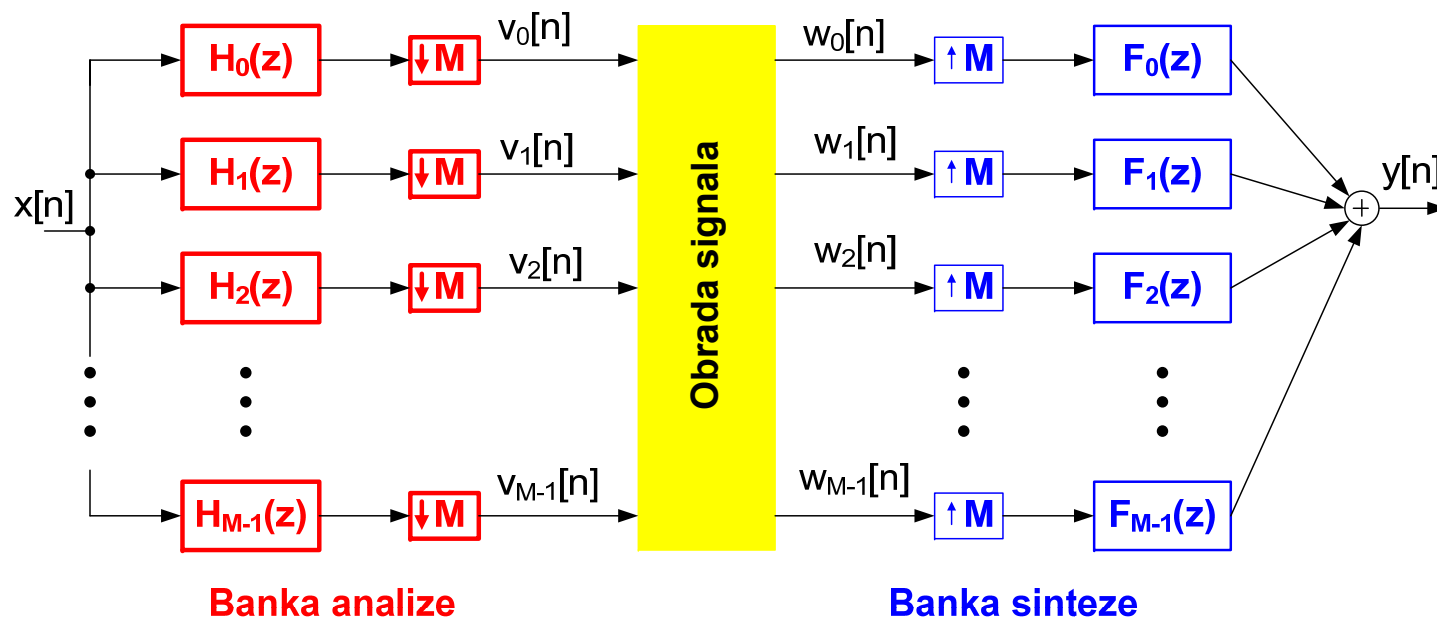
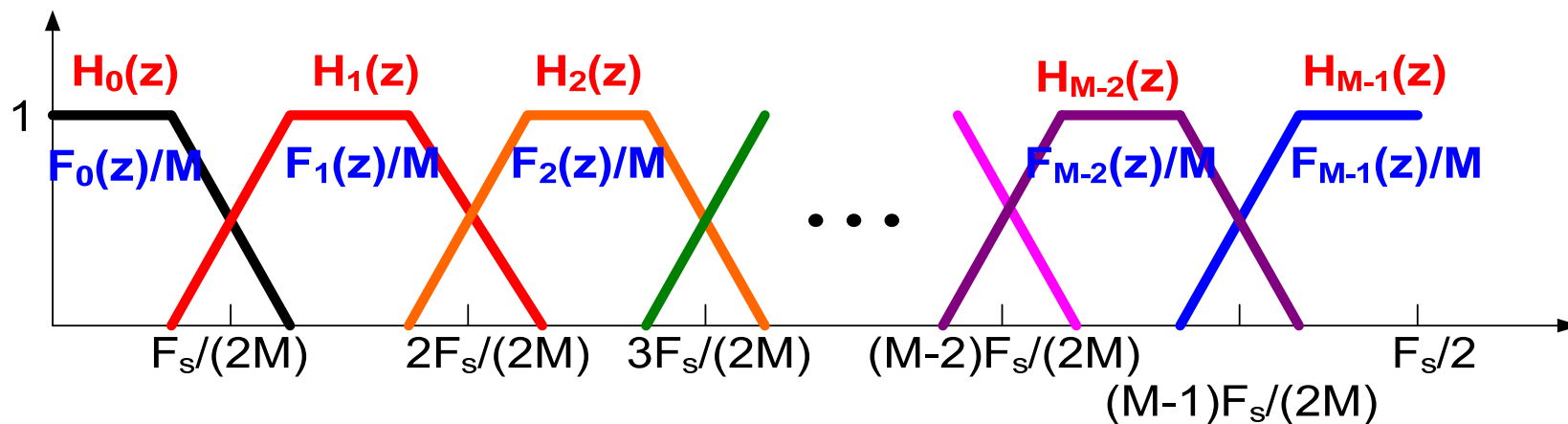
- Prema širini podopsega banke filtara se dele na:
 - **Uniformne banke filtara**
Podopsezi su jednake širine (u linearnoj razmeri)
 - **Neuniformne banke filtara**
Podopsezi nisu jednake širine (u linearnoj razmeri)

Uniformna banka filtara

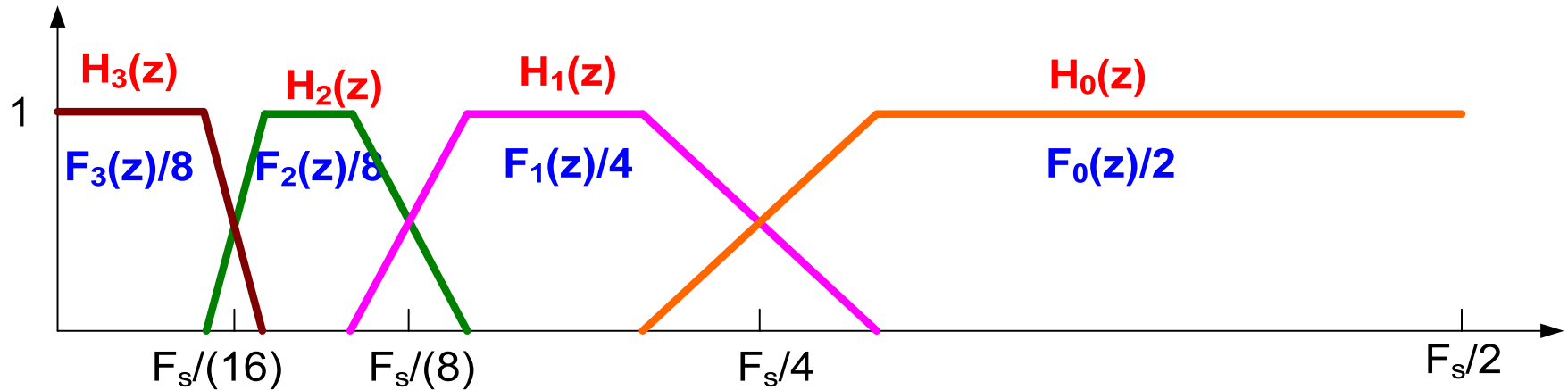


- filtri $H_0(z)$ i $F_0(z)$ - propusnici niskih frekvencija
- filtri $H_{M-1}(z)$ i $F_{M-1}(z)$ propusnici visokih frekvencija
- ostali filtri su propusnici opsega

Uniformna banka filtara

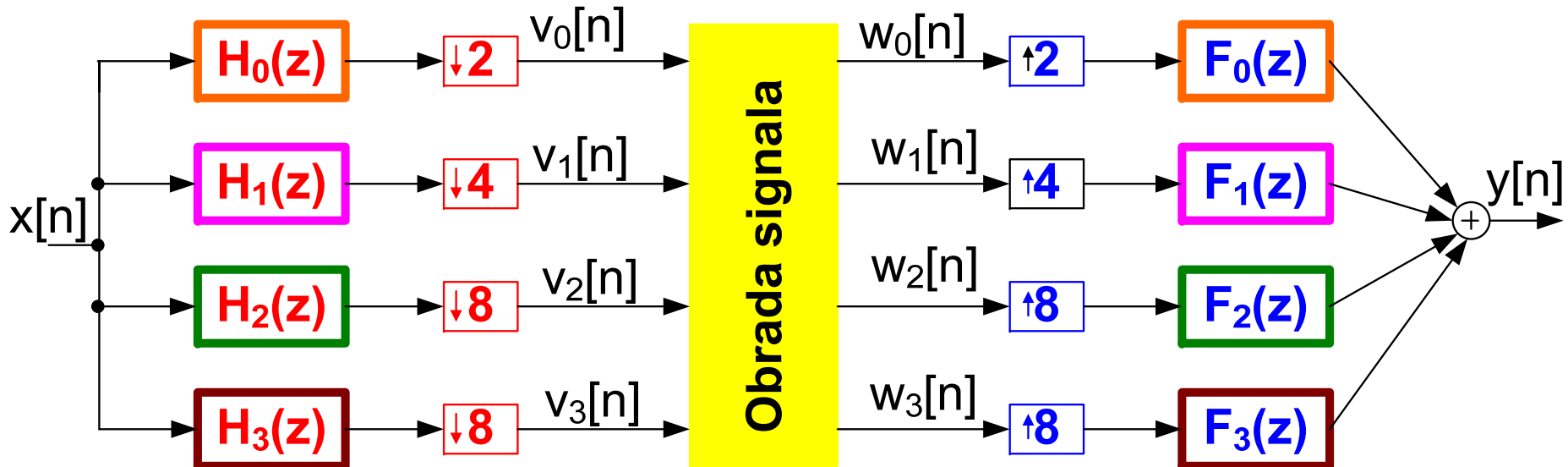
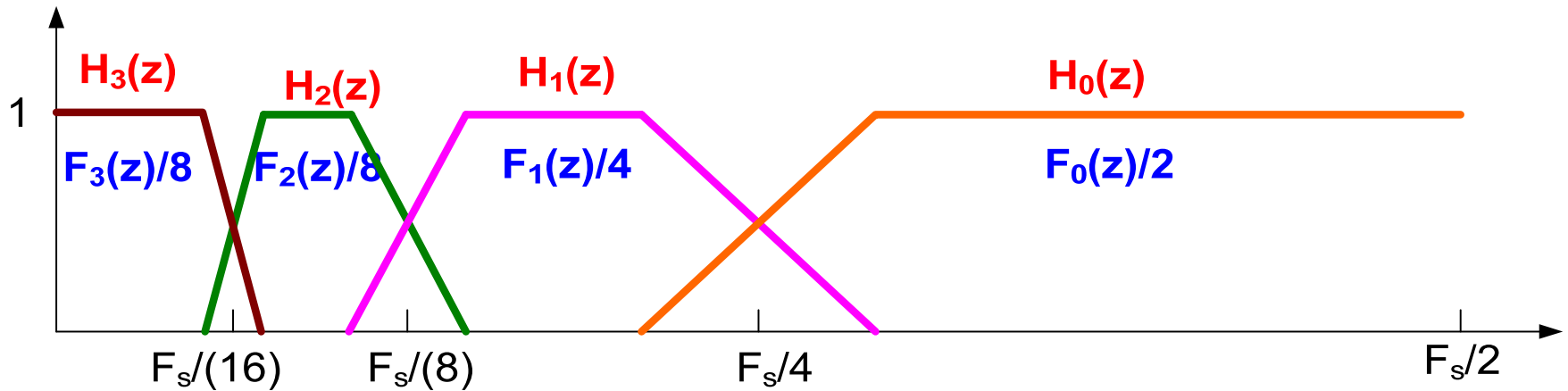


Oktavna banka filtara (neuniformna)

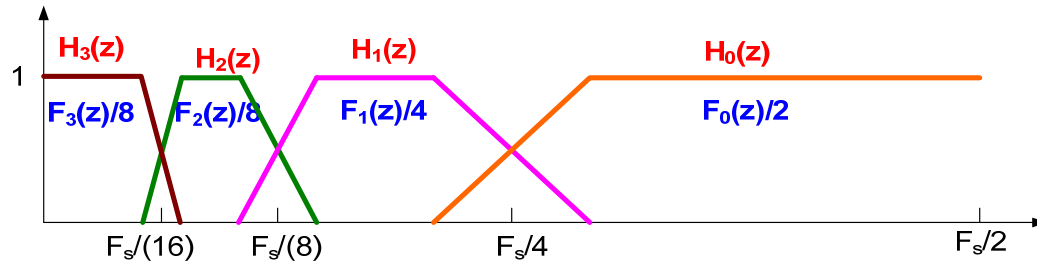
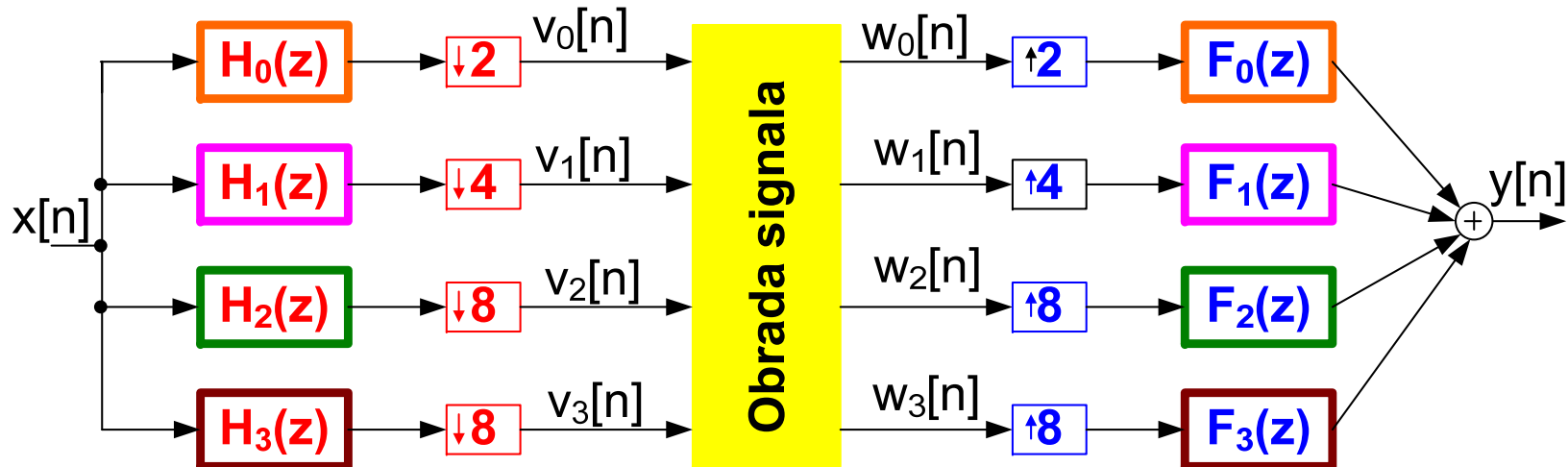


- filtri $H_0(z)$ i $F_0(z)$ - propusnici niskih frekvencija
- filtri $H_{M-1}(z)$ i $F_{M-1}(z)$ propusnici visokih frekvencija
- ostali filtri su propusnici opsega
- filtri **nisu** jednakih širina

Oktavna banka filtera (neuniformna)



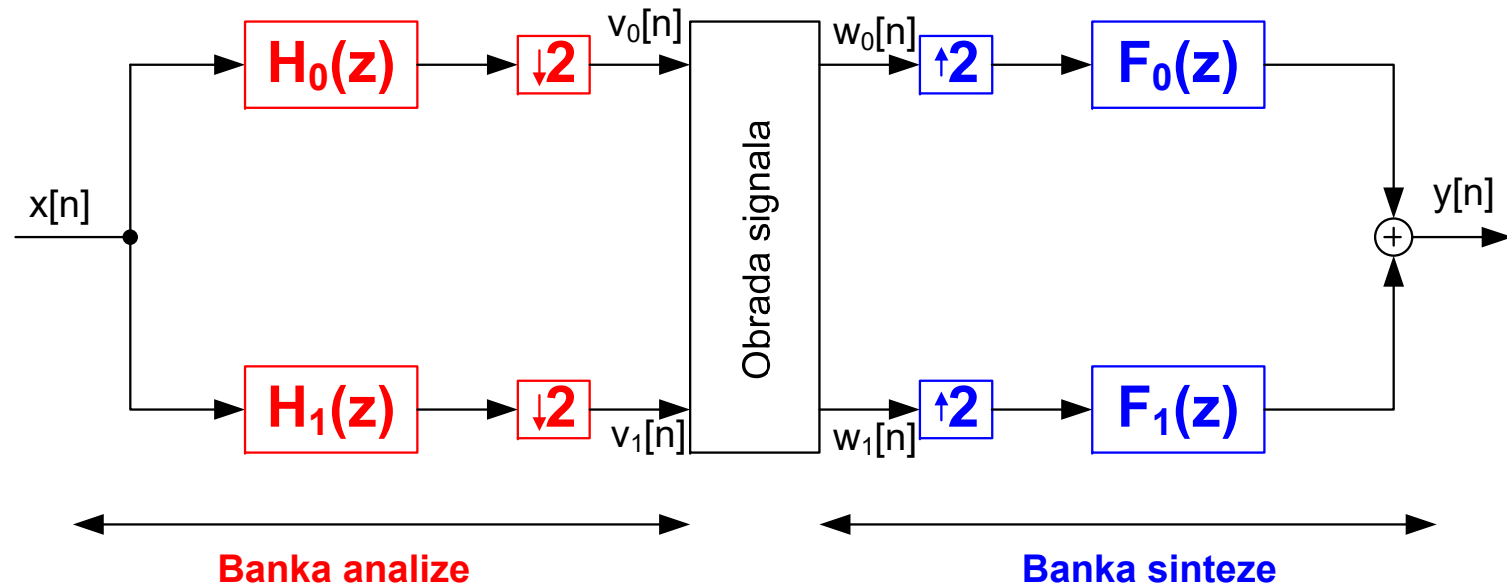
Oktavna banka filtera (neuniformna)



Banka na slici je četvorokanalna (ima 4 kanala, deli frekvencijski opseg od 0 do π na 4 podopsega), nije uniformna (širine podopsega nisu jednake), oktavna je, jer su širine opsega takve da se ceo opseg deli na dva dela, pa donji podopseg na dva dela i tako redom) sa maksimalnom decimacijom (u svakom kanalu se „spušta“ frekvencija odabiranja maksimalno koliko je moguće za ostvarenu širinu kanala)

Dvokanalne banke filtera (uniformne)

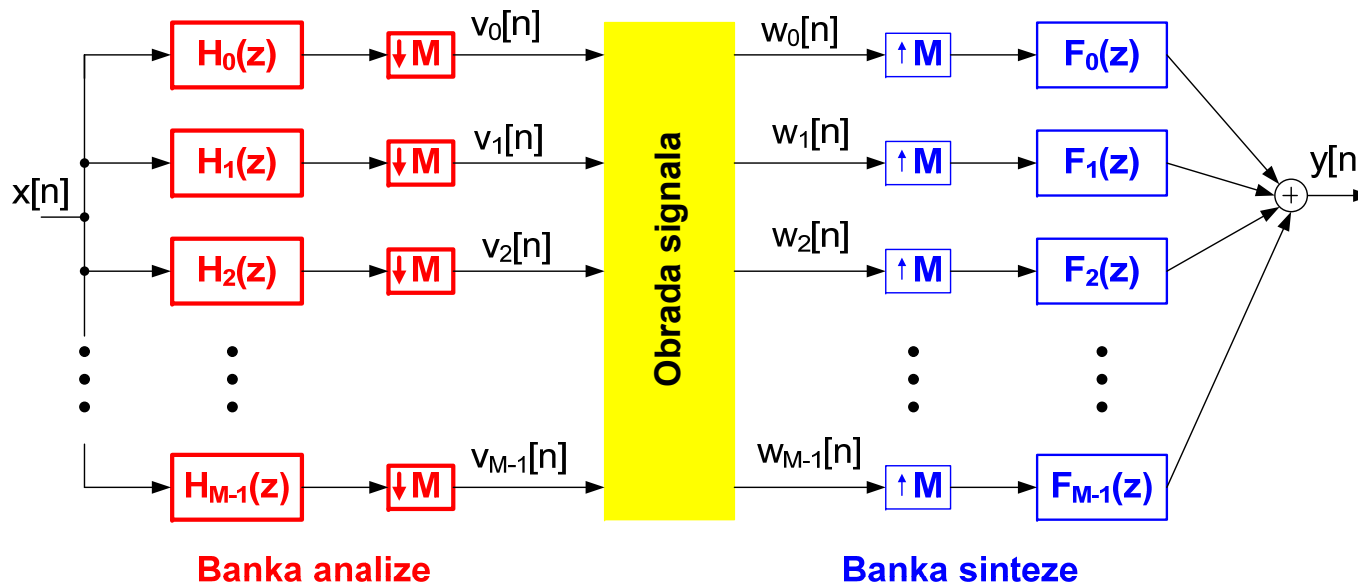
Dvokanalne banke se često koriste kao osnovni elementi za formiranje višekanalnih banaka



Banka na slici je dvokanalna (ima dva kanala, deli frekvencijski opseg od 0 do π na dva podopsega), uniformna (širine podopsega su jednake), sa maksimalnom decimacijom (u svakom kanalu se „spušta“ frekvencija odabiranja 2 puta)

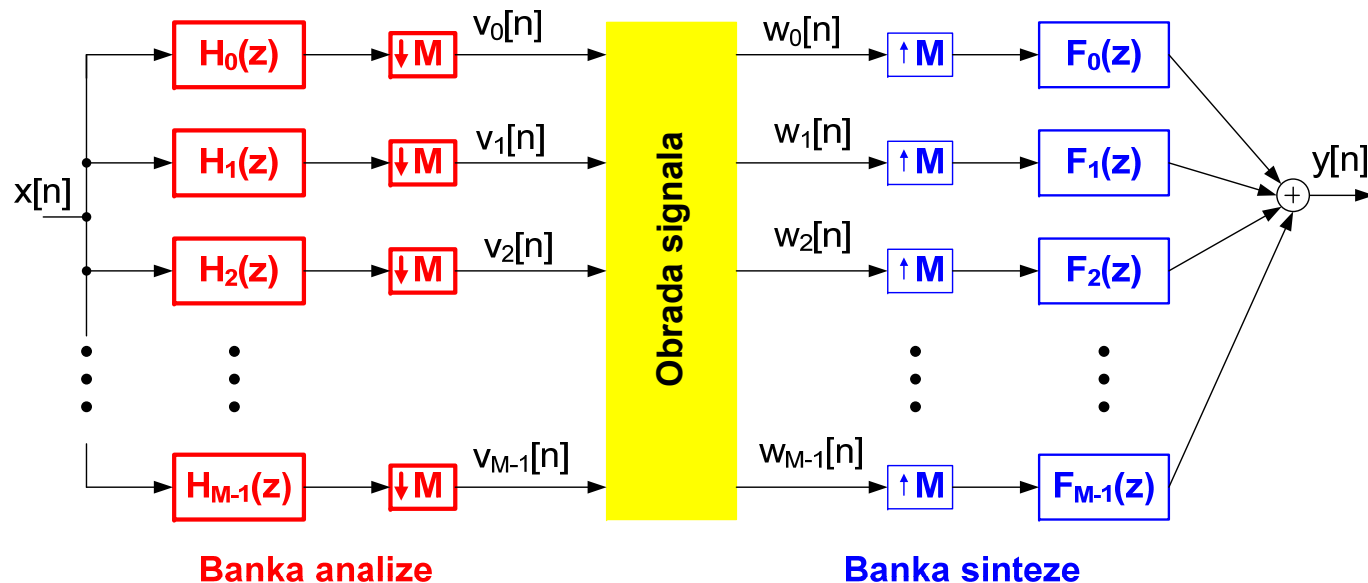
Funkcija prenosa banke

Funkcija prenosa banke (od ulaza u banku analize do izlaza iz banke sinteze): $T(z) = Y(z)/X(z)$



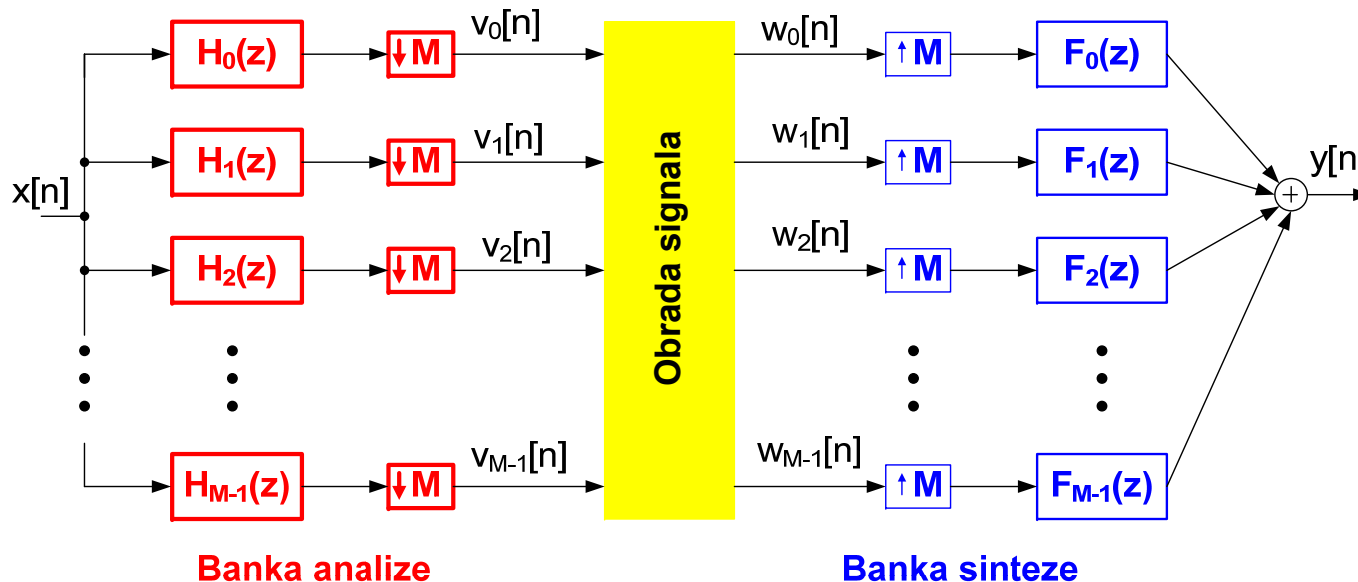
Funkcija prenosa banke

Kada se računa funkcija prenosa, i kada se ispituje osobine filtarske banke, podrazumeva se da blok “obrada signala” ne radi ništa



Banke sa savršenom rekonstrukcijom

- Za digitalne filtarske banke sa savršenom rekonstrukcijom (*perfect reconstruction filter bank*) važi: $y[n]=dx[n-K]$
- Funkcija prenosa banke: $T(z)=Y(z)/X(z)=dz^{-K}$



Banke sa savršenom rekonstrukcijom

- **Za veliki broj aplikacija striktna savršena rekonstrukcija je „preterano strog“ uslov**
- Veliki praktičan značaj imaju takođe banke sa **približno savršenom rekonstrukcijom** kod kojih se dozvoljava izvesna distorzija u odnosu na idealno definisani sistem.
- U slučaju približno savršene rekonstrukcije, filteri su znatno nižega reda nego kod banke sa svršenom rekonstrukcijom.

Banke sa savršenom rekonstrukcijom

- Banke digitalnih filtara pripadaju klasi diskretnih sistema sa višestrukim odabiranjem (*Multirate Systems*) jer se obrada u sistemu obavlja na više različitih frekvencija odabiranja.
- Kakvu će karakteristiku imati banka filtara zavisi od karakteristika pojedinačnih filtara od kojih je banka formirana kao i od efekata preklapanja spektara (*aliasing*) kod sniženja frekvencije odabiranja u banci analize.

Banke sa savršenom rekonstrukcijom

Da bi se ostvarila savršena rekonstrukcija ili približno savršena rekonstrukcija mora se voditi računa o sledećem:

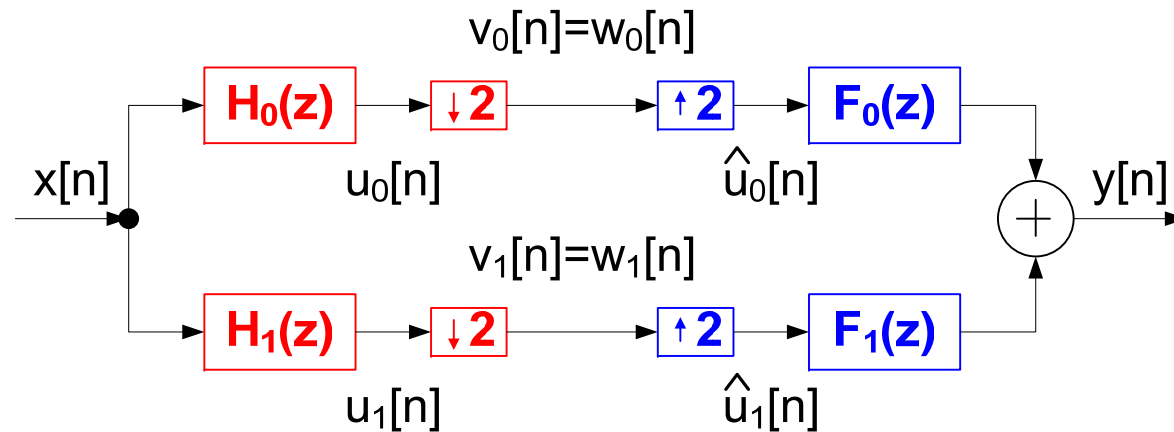
- Filtri analize i filtri sinteze moraju biti projektovani na odgovarajući način.
- Filtri u banci sinteze moraju se birati tako da se kod para banka analize/banka sinteze eliminišu efekti preklapanja koji nastaju u banci analize.

Najvažnije klase dvokanalnih banaka filtara

- **QMF** (*Quadrature Mirror Filter*) banke kod kojih su $H_0(z)$ i $H_1(z)$ vezani relacijom $H_1(z) = H_0(-z)$. Sa ovom bankom može se ostvariti **približno savršena rekonstrukcija**
- **Ortogonalne banke** kod kojih su $H_0(z)$ i $H_1(z)$ vezani relacijom $H_1(z) = -z^{-N_0}H_0(-z^{-1})$. Sa ovom bankom može se ostvariti **savršena rekonstrukcija i približno savršena rekonstrukcija**
- **Biortogonalne banke** kod kojih se $H_0(z)$ i $H_1(z)$ biraju prema uslovima postavljenim za banku u celini. Mogu ostvariti savršenu rekonstrukciju ili približno savršenu rekonstrukciju. Značajne su za *wavelet* transformaciju, odnosno određene klase *wavelet* transformacije mogu se realizovati kao biortogonalna filtarska banka

U literaturi se sreću i drugačije podele kao i nešto drugačiji nazivi za klase dvokanalnih filtarskih banaka

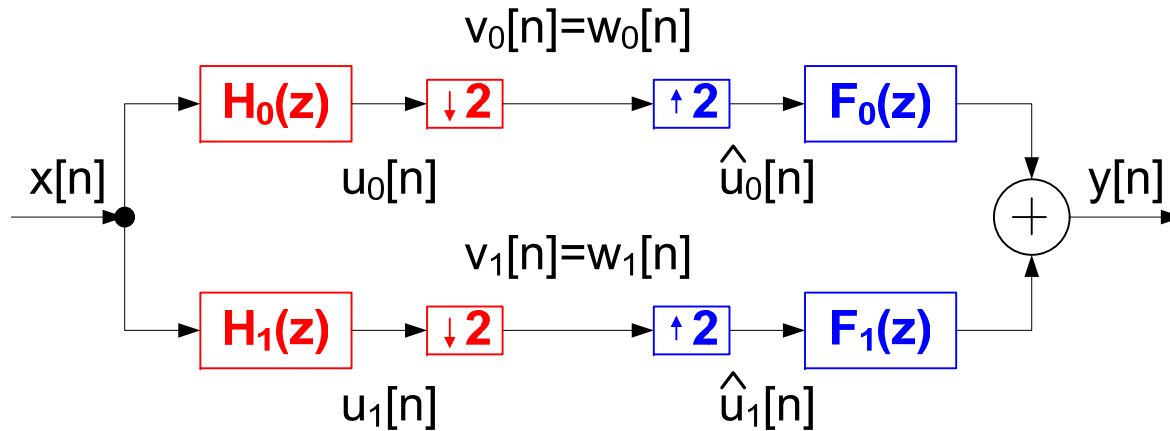
Dvokanalna banka – funkcija prenosa



$$v_k[n] = w_k[n]$$

Izostavljen je blok “obrada signala” jer se karakteristika banke definiše u odnosu na samu banku, bez dodatnih obrada signala

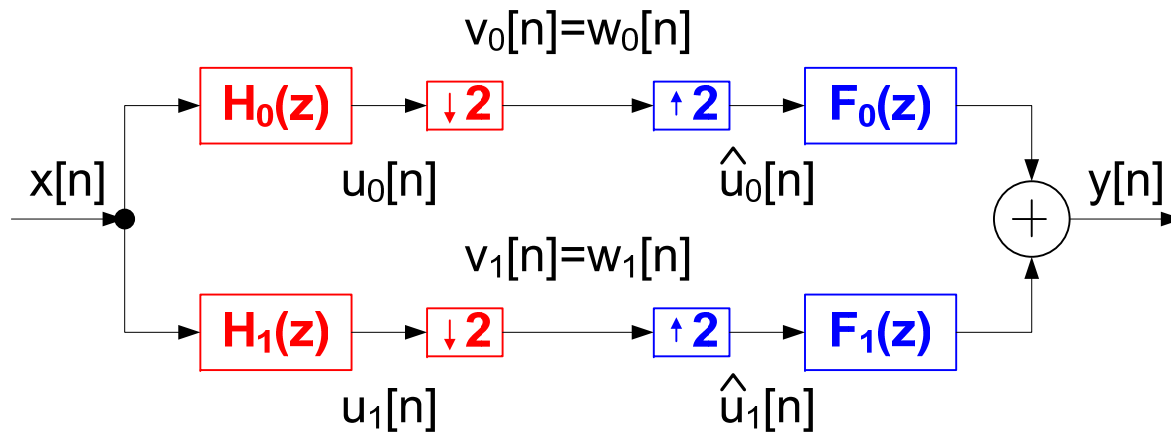
Dvokanalna banka



$$U_k(z) = X(z)H_k(z)$$

$$V_k(z) = \frac{1}{2} \left(U_k \left(z^{\frac{1}{2}} \right) + U_k \left(-z^{\frac{1}{2}} \right) \right) \quad \text{downsampler}$$

Dvokanalna banka

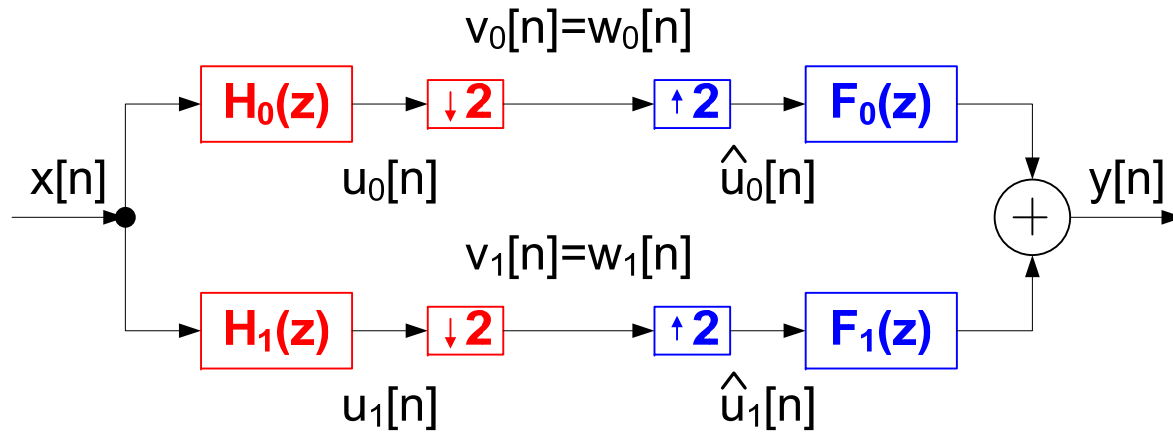


$$v_k[n] = w_k[n]$$

$$\hat{U}_k(z) = W_k(z^2) = V_k(z^2) \quad \text{upsampler}$$

$$Y(z) = \hat{U}_0(z)F_0(z) + \hat{U}_1(z)F_1(z)$$

Dvokanalna banka



$$v_k[n] = w_k[n]$$

$$U_k(z) = X(z)H_k(z)$$

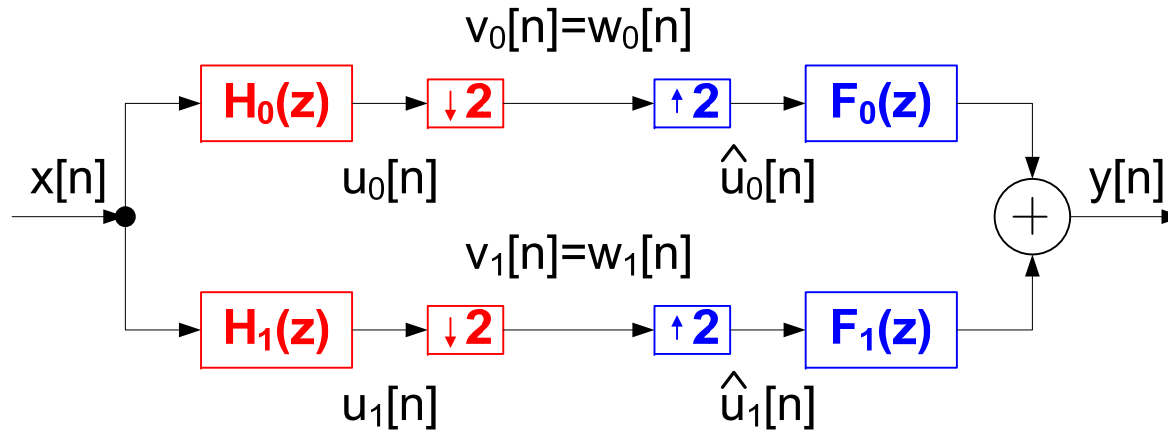
$$V_k(z) = \frac{1}{2} \left(U_k \left(z^{\frac{1}{2}} \right) + U_k \left(-z^{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

$$\hat{U}_k(z) = W_k(z^2) = V_k(z^2)$$

$$\hat{U}_k(z) = \frac{1}{2} (X(z)H_k(z) + X(-z)H_k(-z))$$

$$Y(z) = \hat{U}_0(z)F_0(z) + \hat{U}_1(z)F_1(z)$$

Dvokanalna banka



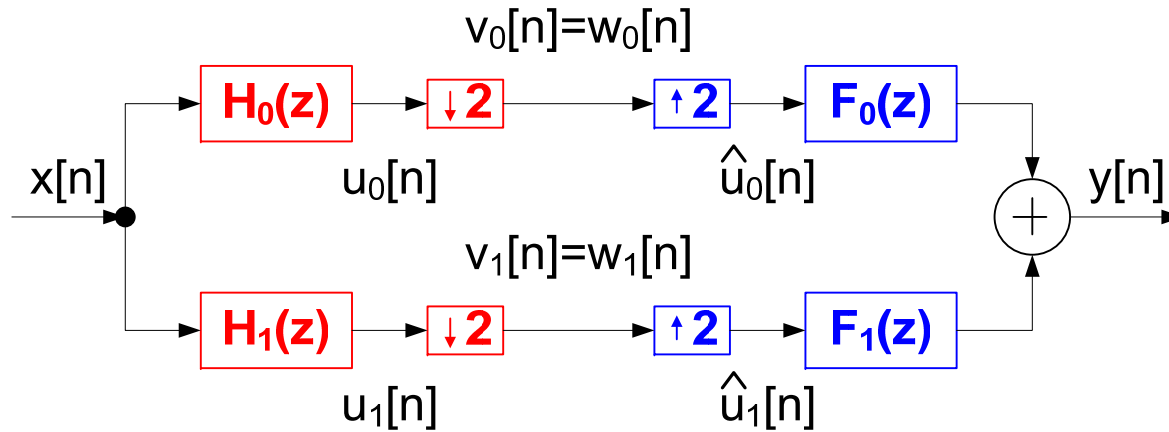
$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z))F_0(z) +$$

$$\frac{1}{2} (X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z))F_1(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z)(H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)) + \frac{1}{2} X(-z)(H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z))$$

$$Y(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$$

Dvokanalna banka



$$Y(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$$

$T(z)$ – Distortion
Transfer Function

$A(z)$ – Aliasing
Transfer Function

Preklapanje spektra

- Uslov da ne postoji preklapanje spektra (*aliasing*)

$$A(z) = 0$$

$$H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$$

- Ako ne postoji *aliasing*: $Y(z) = T(z)X(z)$
- Savršena rekonstrukcija se dobija ako je:

$$T(z) = z^{-l}$$

Dvokanalne banke filtara – izbor filtara

- Preklapanja spektra koje nastaje usled sniženja frekvencije odabiranja u banci analize može se kompenzovati u banci sinteze ako se filtri $F_0(z)$ i $F_1(z)$ izaberu na sledeći način:

$$F_0(z) = 2H_1(-z), \quad F_1(z) = -2H_0(-z)$$

- Ukupna funkcija prenosa dvokanalne banke u kojoj je eliminisano preklapanje je:

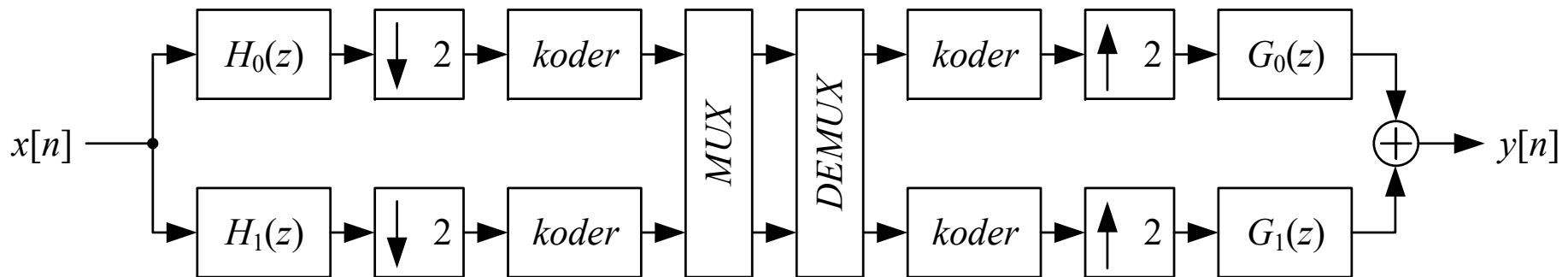
$$T(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$$

- **Izbor propusnika niskih frekvencija $H_0(z)$ je najvažniji korak u projektovanju banke filtara jer sve ostale karakteristike sistema proističu iz karakteristika ovoga filtra.**

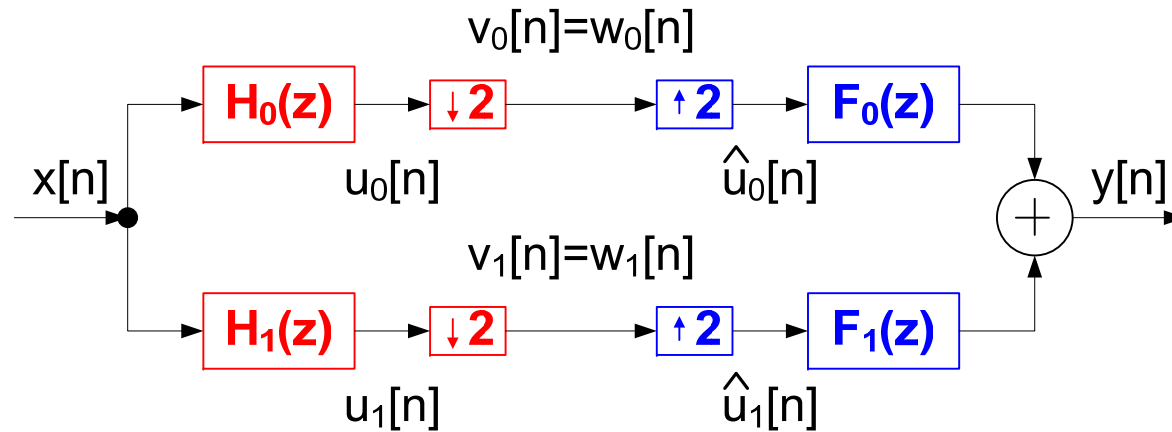
Dvokanalna Quadrature-Mirror banka

- primer

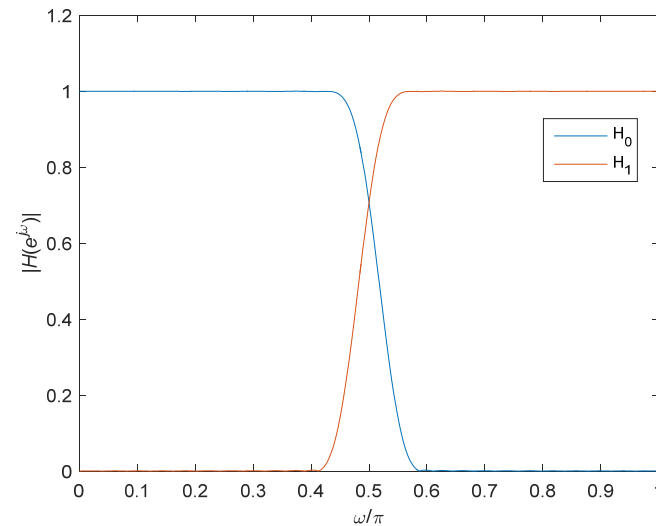
- Ulazni signal se propušta kroz filtre propusnike niskih i visokih učestanosti, sa graničnim frekvencijama na sredini celog opsega, zatim se izvrši *downsampling* pa kodovanje, i u tom obliku prenosi, arhivira ili obrađuje
- Da bi se regenerisao originalni signal, posle dekodovanja i upsamplinga, propušta se kroz dva filtra, čiji zbir sadrži informaciju iz originalnog signala



Dvokanalna QMF banka



$$H_1(z) = H_0(-z)$$



Dvokanalna QMF banka bez preklapanja spektra

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

$$\left| H_1(e^{j\omega}) \right| = \left| H_0(e^{j(\pi-\omega)}) \right|$$



$$F_0(z) = 2H_1(-z), \quad F_1(z) = -2H_0(-z)$$

$$T(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$$

Dvokanalna QMF banka sa savršenom rekonstrukcijom

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$$

$$H_1(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$$

$$F_0(z) = (1 + z^{-1})$$

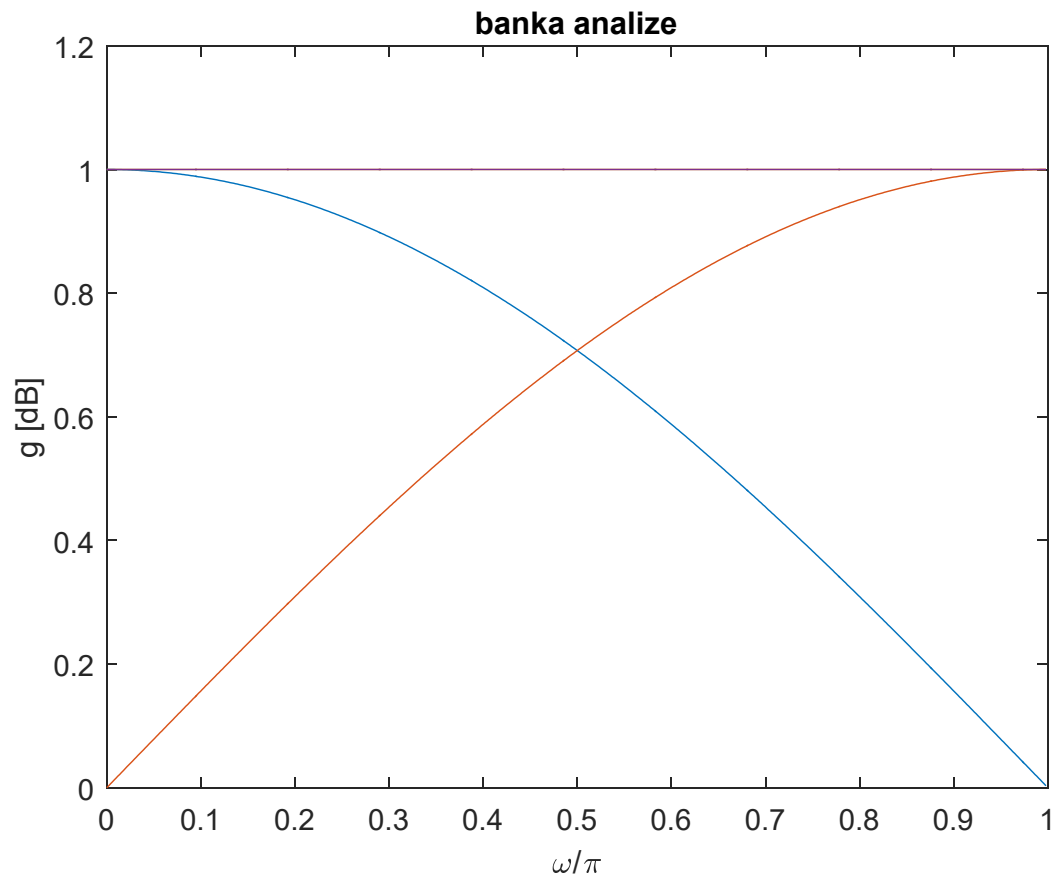
$$F_1(z) = (-1 + z^{-1})$$

$$T(z) = z^{-1}$$

$$A(z) = 0$$

Trivijalan slučaj, filtri su prvog reda

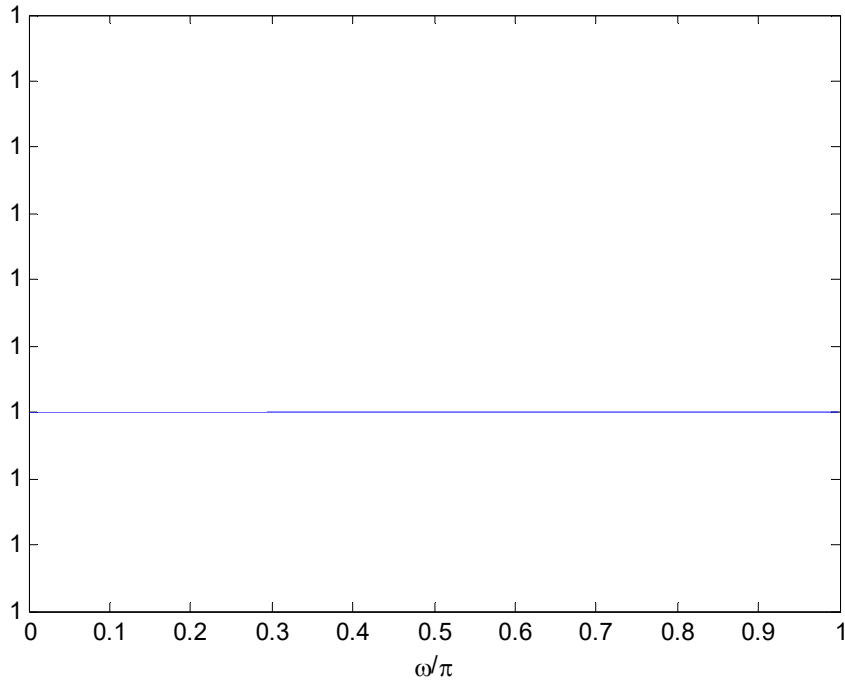
Dvokanalna QMF banka sa savršenom rekonstrukcijom



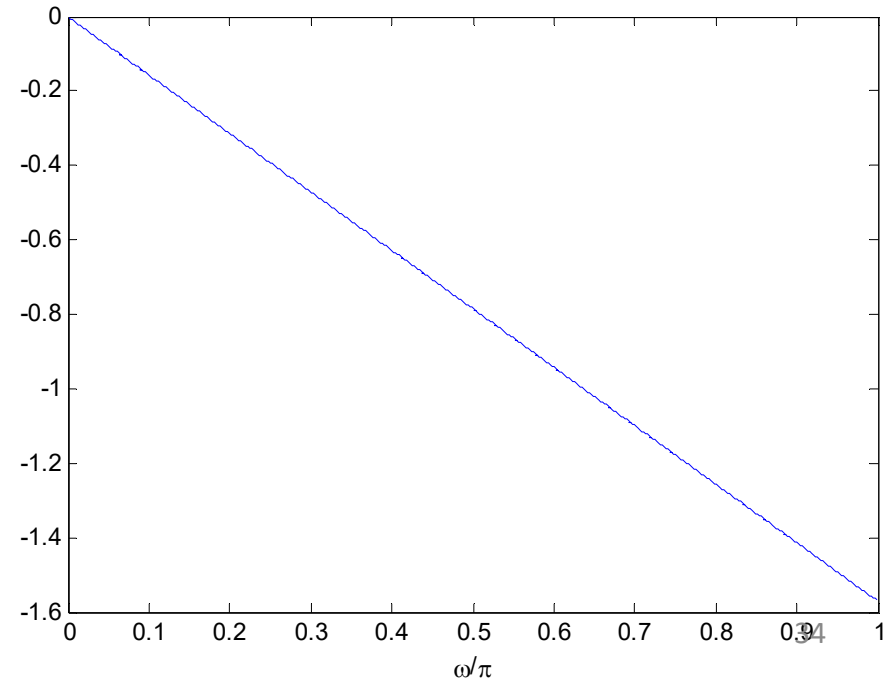
filtri su i *all-pass*
komplementarni i
power komplementarni

Dvokanalna QMF banka sa savršenom rekonstrukcijom

Amplitudska k-ka od
ulaza u banku analize
do izlaza iz banke sinteze - konst



Fazna k-ka od
ulaza u banku analize
do izlaza iz banke sinteze - lin faza

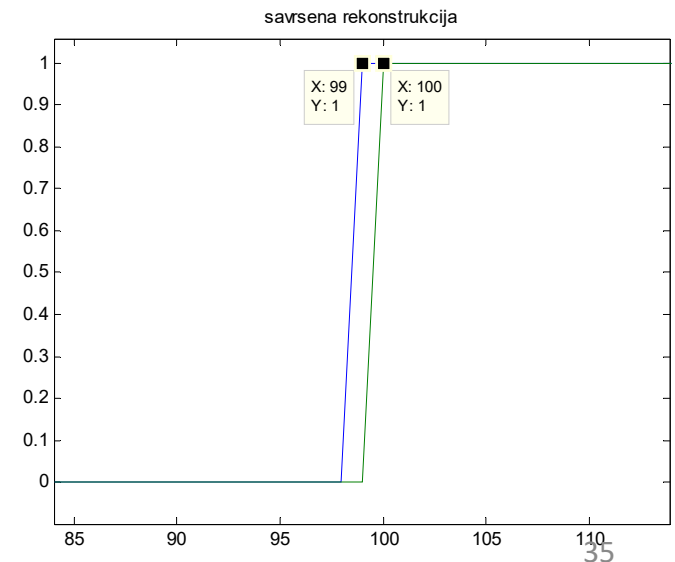
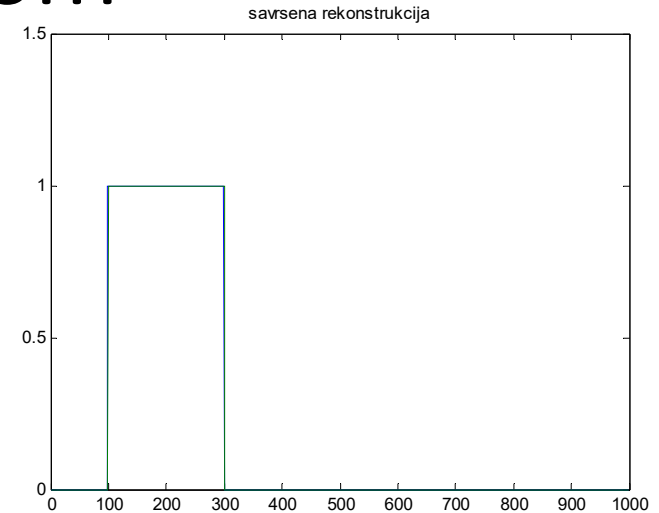


Dvokanalna QMF banka sa savršenom rekonstrukcijom

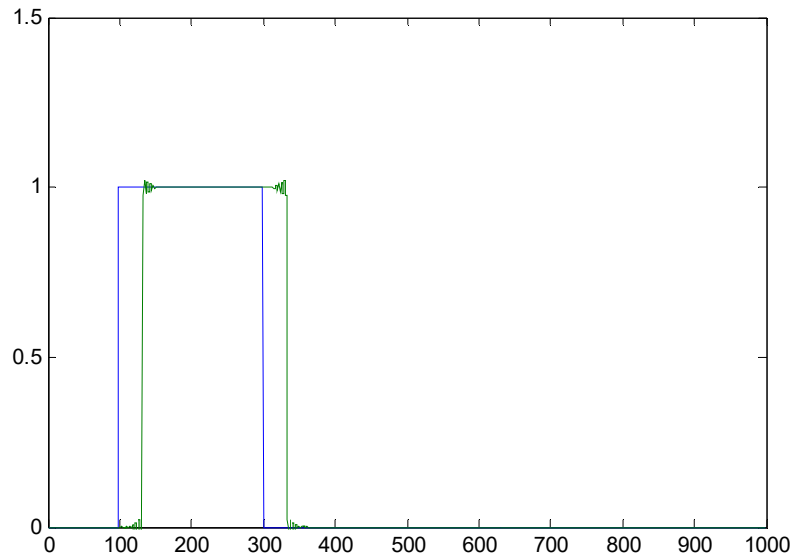
```

%% provera sa ulaznim signalom oblika usamljenje
cetvrtke
x=zeros(1000,1);
x(100:300)=1;
u0=filter(h0,1,x);
u1=filter(h1,1,x);
v0=u0(1:2:end);
v1=u1(1:2:end);
figure,subplot(3,1,1),plot(0:length(x)-1,x);
subplot(3,1,2),plot(0:length(v0)-1,v0);
subplot(3,1,3),plot(0:length(v1)-1,v1);
w0=zeros(size(x));
w0(1:2:end)=v0;
w1=zeros(size(x));
w1(1:2:end)=v1;
v0k=filter(f0,1,w0);
v1k=filter(f1,1,w1);
y=v0k+v1k;
figure,plot(0:length(x)-1,x,0:length(x)-1,y),
ylim([0 1.5]), title('savrsena rekonstrukcija');

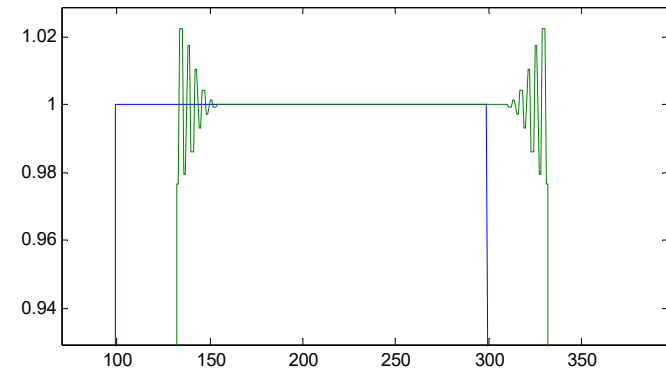
```



Digresija – zašto usamljena četvrtka kao primer



Odstupanje od savršene rekonstrukcije se lako detektuje jer se uzlazna ivica „degradira“



Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda

- FIR filtri u banci analize linearne faze koji se projektuju nama poznatim metodama (sa prozorskim funkcijama koje smo pominjali i kao optimalni filtri) ne mogu da daju rešenje za QMF filtersku banku sa savršenom rekonstrukcijom
- FIR filtri linearne faze koje smo do sada projektovali (optimalni, metodom prozora) mogu biti **delay komplementarni** (*all-pass komplementarni*) ali nisu **power komplementarni**

Komplementarni filterski parovi

Podsetnik

- *delay* komplementarnost $G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$
- *all-pass* komplementarnost $G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = A_{AP}(e^{j\omega})$
- *power* komplementarnost $|G(e^{j\omega})|^2 + |G_C(e^{j\omega})|^2 = 1$
- *magnitude* komplementarnost $|G(e^{j\omega})| + |G_C(e^{j\omega})| = 1$

Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda

- FIR QMF filtarska banka sa filtrima linearne faze višeg reda može se dobiti složenijim metodama projektovanja
- Može se ostvariti približno savršena rekonstrukcija (uz kompletnu eliminaciju preklapanja u spektru)



Primer - koji ne radi

```

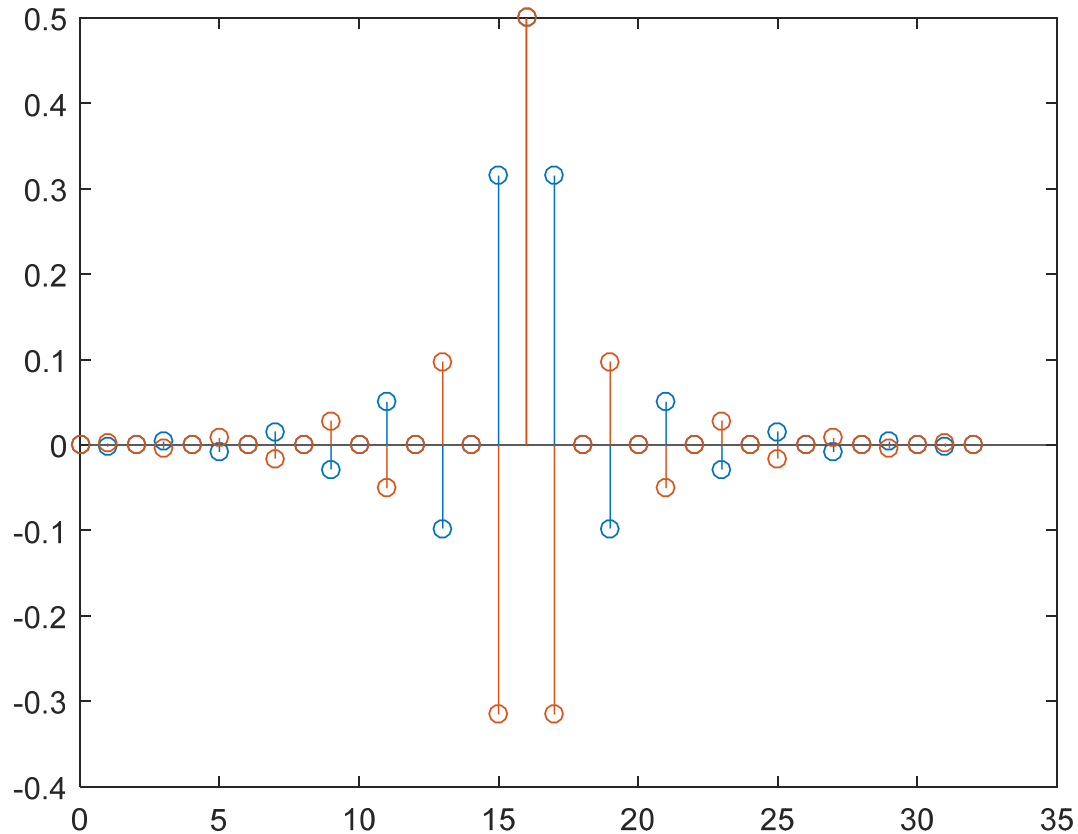
close all; clear;
N=32; % neparan red
h0=fir1(N, .5, 'noscale');
h1=h0;
h1(2:2:end)=-h1(2:2:end); % H1(z)=H0(-z), promeni se znak
svakom drugom koef.
figure, stem(0:N, [h0' h1']);
[H0,w]=freqz(h0,1);
[H1,w]=freqz(h1,1);
figure, plot(w/pi, 20*log10(abs([H0 H1
H0+H1])), w/pi, 20*log10(abs(H0).^2+abs(H1).^2)),
xlabel('\omega/\pi');
ylabel('dB'); legend('H0', 'H1', 'H0+H1', '|H0|^2+|H1|^2');

```

$$H_1(z) = H_0(-z)$$



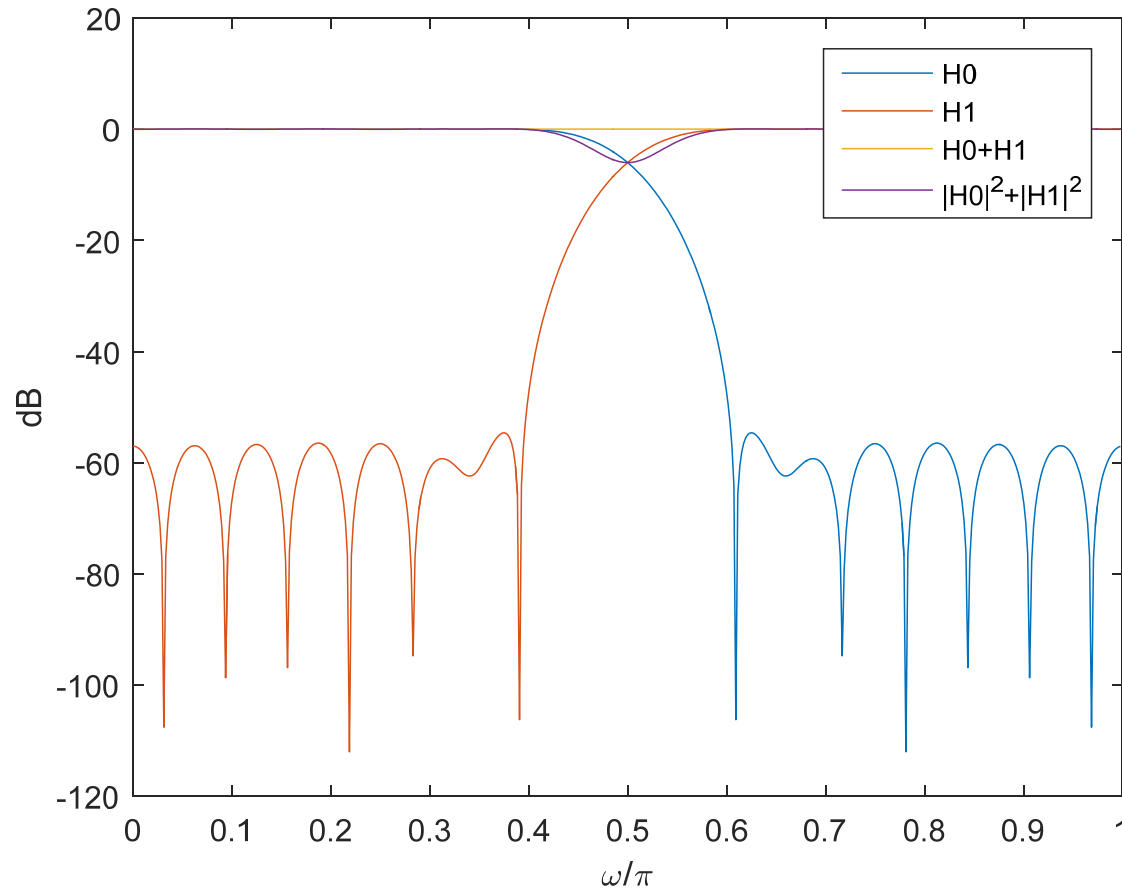
Primer - koji ne radi



$$H_1(z) = H_0(-z)$$



Primer - koji ne radi



$$H_1(z) = H_0(-z)$$



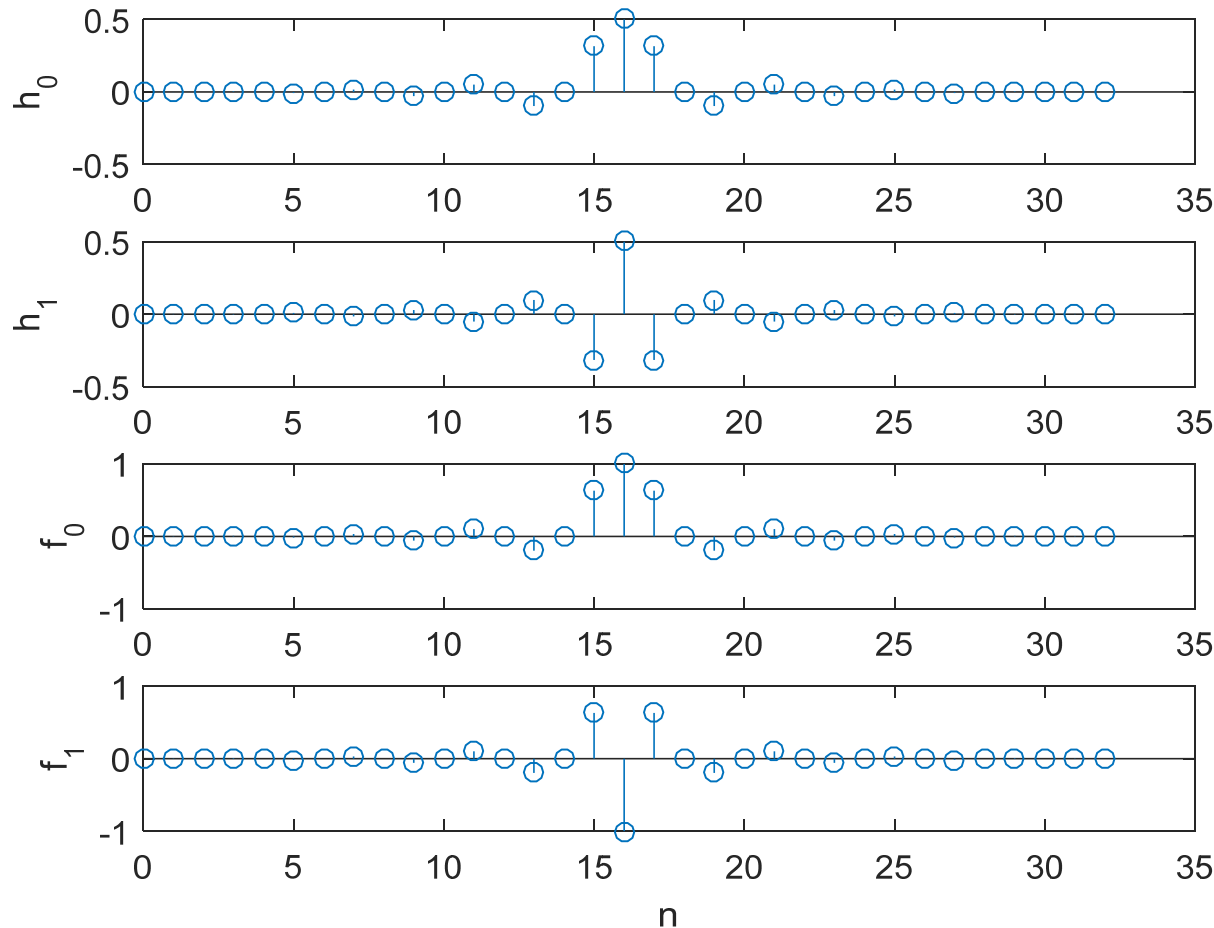
Primer - koji ne radi

```
f0=2*h1; % banka sinteze se pravi tako da  
nema aliasinga  
f0(2:2:end)=-f0(2:2:end);  
f1=-2*h0;  
f1(2:2:end)=-f1(2:2:end);  
figure, subplot(4,1,1), stem(0:N, h0),  
ylabel('h_0');  
subplot(4,1,2), stem(0:N, h1), ylabel('h_1');  
subplot(4,1,3), stem(0:N, f0), ylabel('f_0');  
subplot(4,1,4), stem(0:N, f1), ylabel('f_1');  
xlabel('n');
```

$$H_1(z) = H_0(-z)$$



Primer - koji ne radi

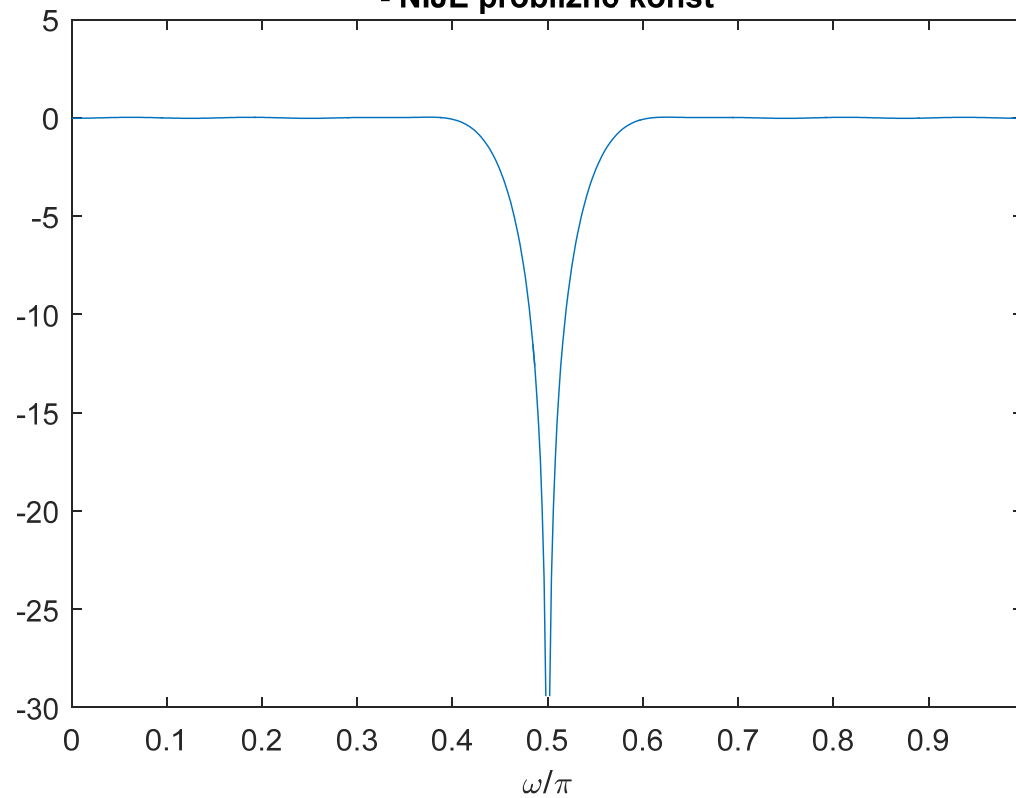


$$H_1(z) = H_0(-z) \quad F_0(z) = 2H_1(-z), \quad F_1(z) = -2H_0(-z)$$

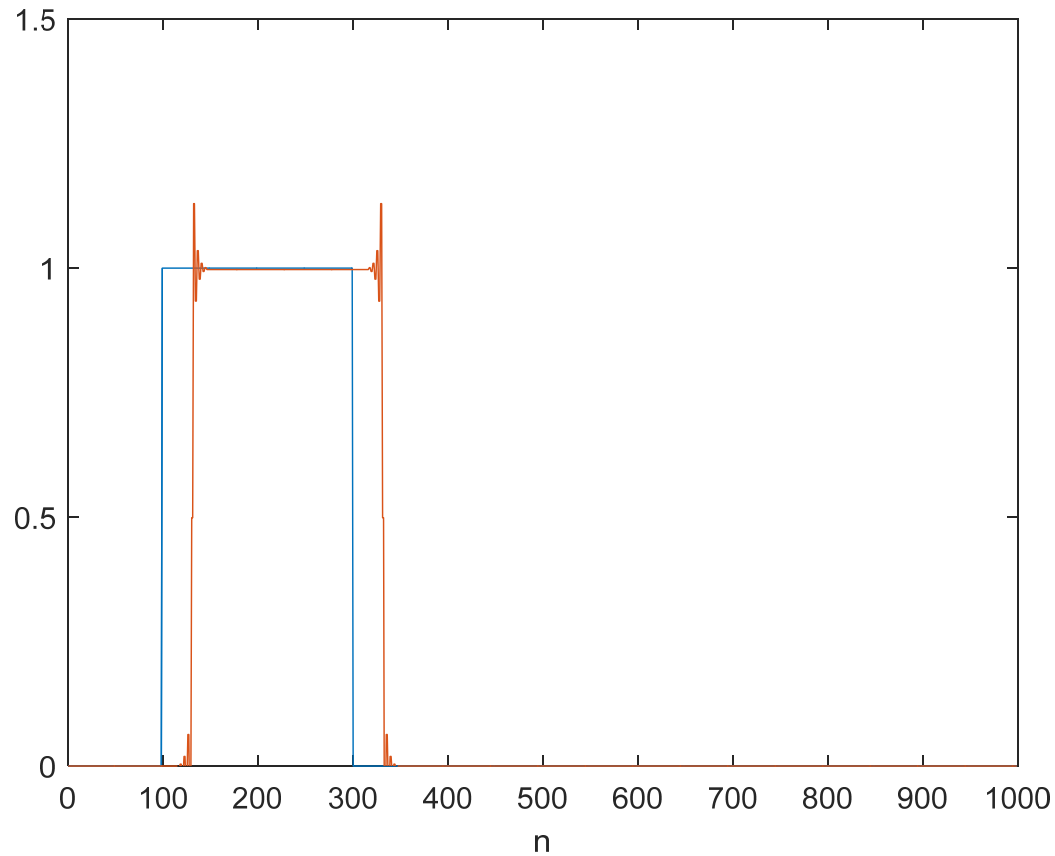


Primer - koji ne radi

Moduo funkcije prenosa
od ulaza u banku anaize do izlaza iz banke sinteze
- NIJE priblizno konst

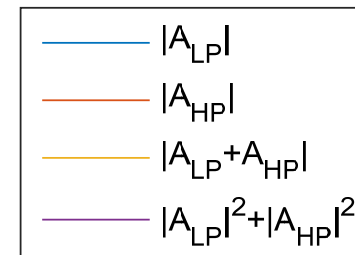
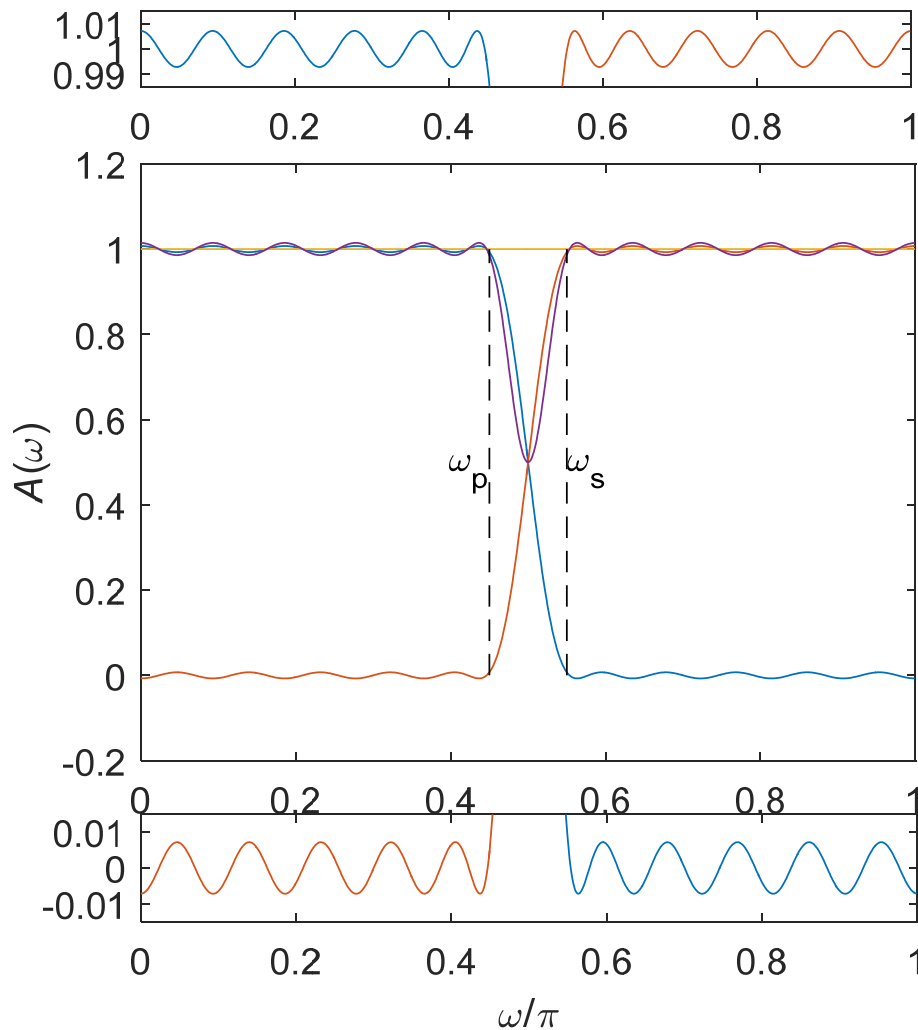


Primer - koji ne radi





Primer - koji ne radi



FIR *half-band* filter koji smo definisali **NIJE** power komplementaran

$wg=0.45;$

$dev=0.01;$

% projektovanje LP half-band filtra
`hlp=firhalfband('minorder',wg,dev);`

`N=length(hlp)-1;`

`hhp=-hlp; % HP`

`hhp(N/2+1)=0.5; %HP`



Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda

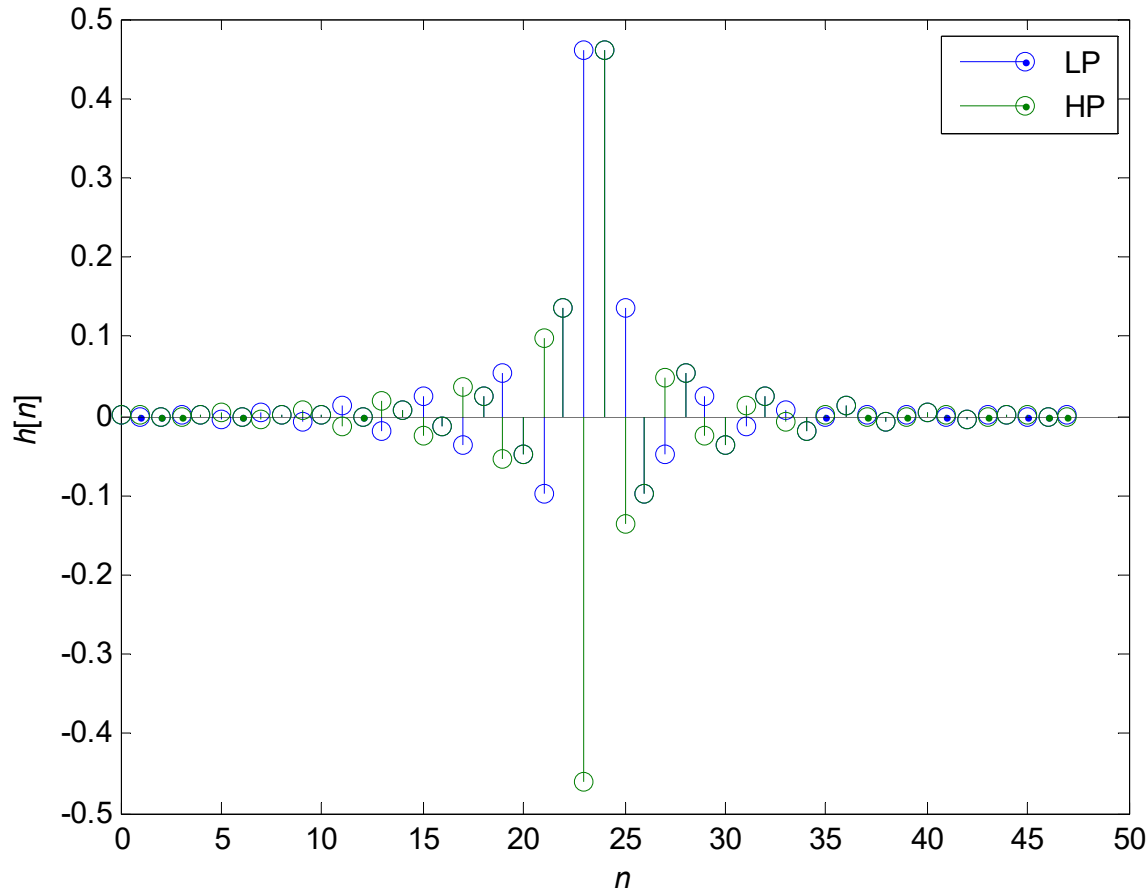


```
%% primer 6 - QMF banka - priblizno savrsena rekonstrukcija
% koeficijenti su preuzeti iz literature, filter nije projektovan ni jednom
% od standardnih metoda za projektovanje fir filtera koje smo da sada ucili
close all; clear;
N=47;
h0=[0.00040829340,-0.00061083240,-0.00066471290,0.0015016570,0.00089979030,-0.0029611340,...
    -0.00095592250,0.0051489700,0.00063647700,-0.0082474350,0.00033292710,0.012465680,...
    -0.0023574670,-0.018121920,0.0060226430,0.025813150,-0.012422540,-0.036906340,0.024020070,...
    0.055379000,-0.048731140,-0.098437790,0.13639810, 0.46139480]; % polovina koef. filtra h0, filter je lin faze
h0=[h0,fliplr(h0)]; % filter je lin faza pa su koef. simetricni
h1=h0;
h1(2:2:end)=-h1(2:2:end);
figure,stem(0:N,[h0' h1']);
xlabel('\itn'); ylabel('\itn');legend('LP','HP');
```

Banka analize

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

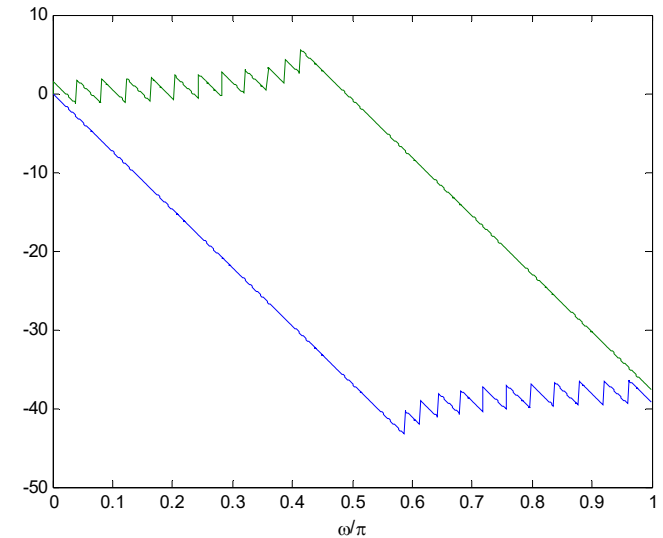
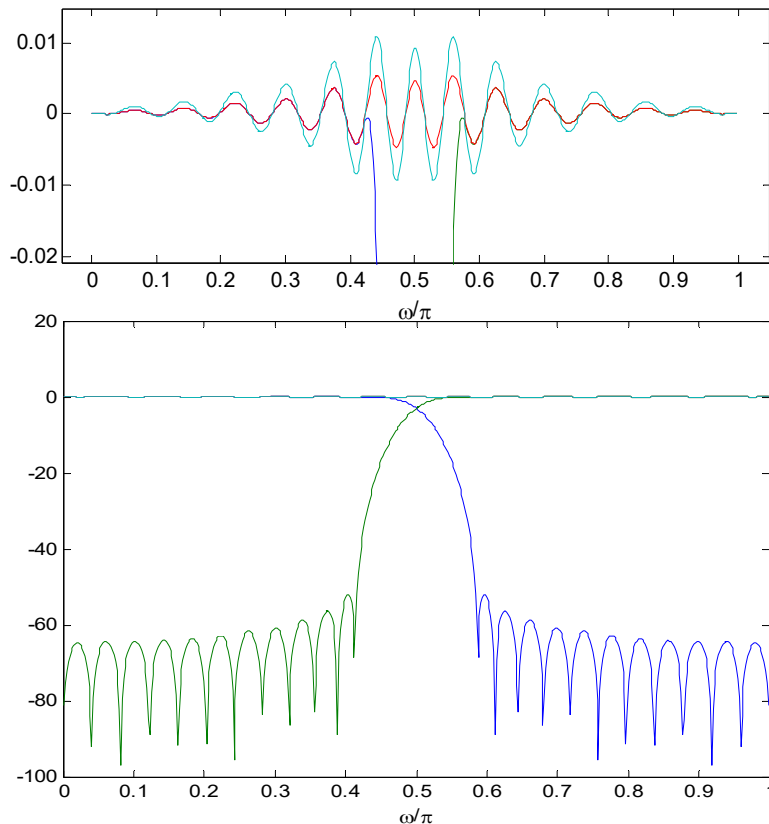
Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda



Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda



```
[H0,w]=freqz(h0,1);
[H1,w]=freqz(h1,1);
figure,plot(w/pi,20*log10(abs([H0 H1 H0+H1])),w/pi,20*log10(abs(H0).^2+abs(H1).^2)), xlabel('\omega/\pi');
% provera komplementarnosti, filtri su priblizno all-pass komplementarni i power komplementarni
figure,plot(w/pi,unwrap(angle([H0 H1])), xlabel('\omega/\pi');
```



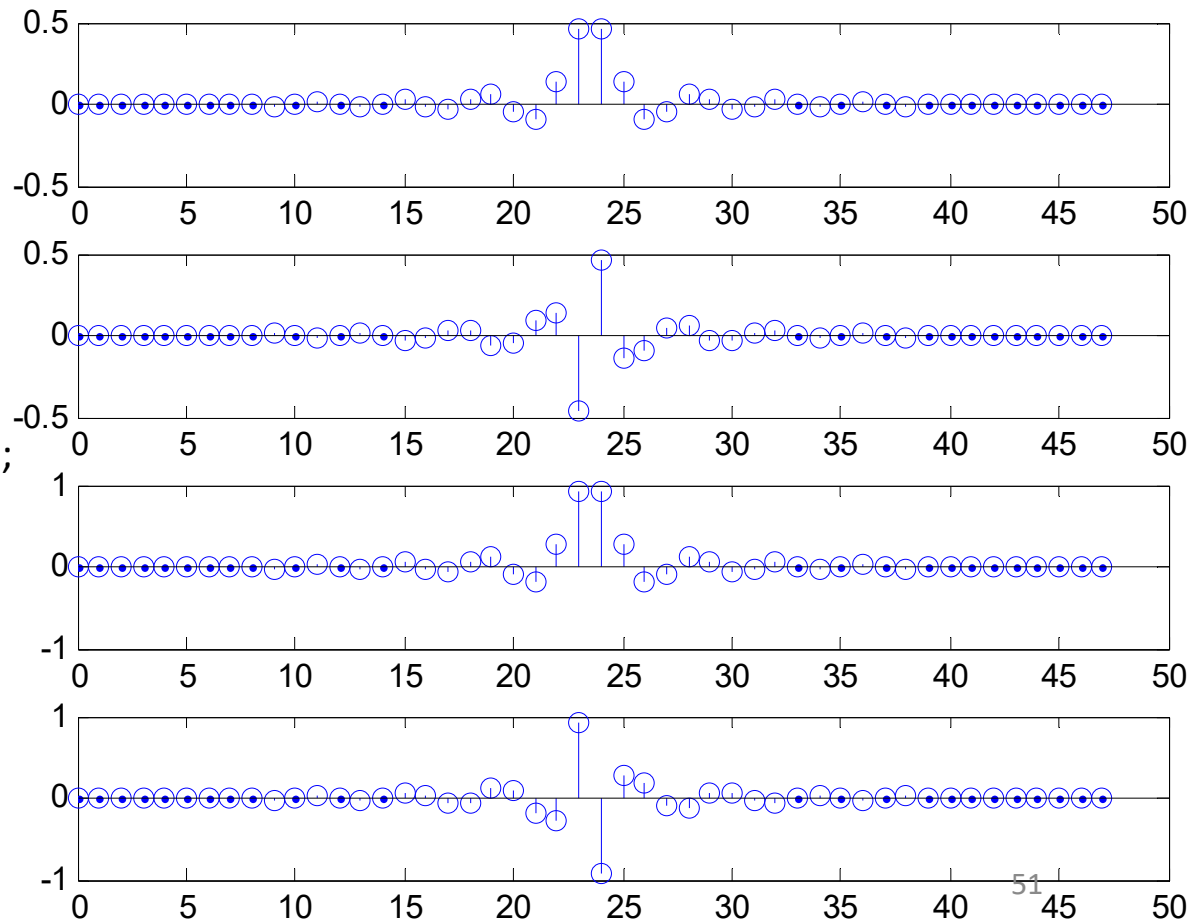
Banka analize
 $H_1(z)=H_0(-z)$

Približno *all-pass* i
power
komplementaran
filtarski par

Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda



```
f0=2*h1;
f0(2:2:end)=-f0(2:2:end);
f1=-2*h0;
f1(2:2:end)=-f1(2:2:end);
figure,subplot(4,1,1),stem(0:N,h0);
subplot(4,1,2),stem(0:N,h1);
subplot(4,1,3),stem(0:N,f0);
subplot(4,1,4),stem(0:N,f1);
[F0,w]=freqz(f0,1);
[F1,w]=freqz(f1,1);
figure,plot(w/pi,20*log10(abs([F0 F1]])),
xlabel('\omega/\pi'),title('banka sinteze');
```

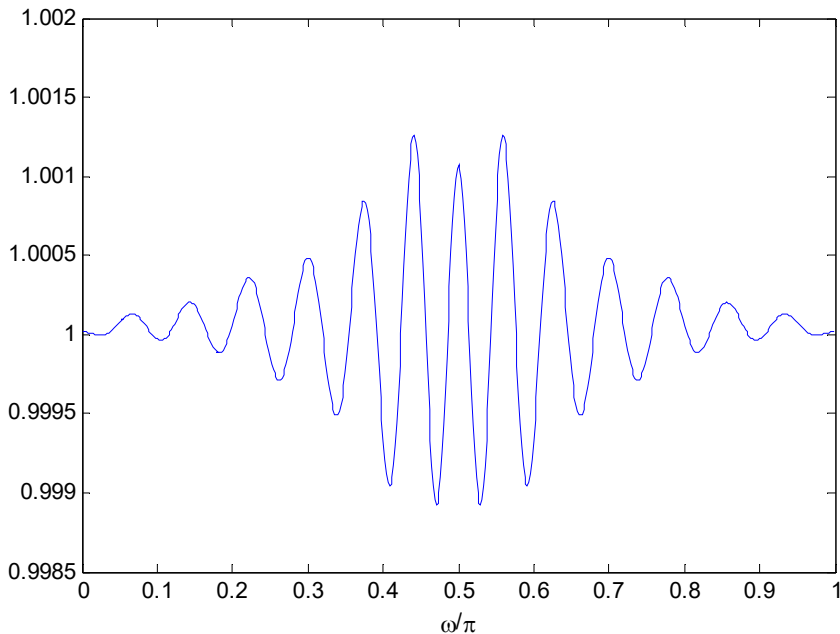


Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda

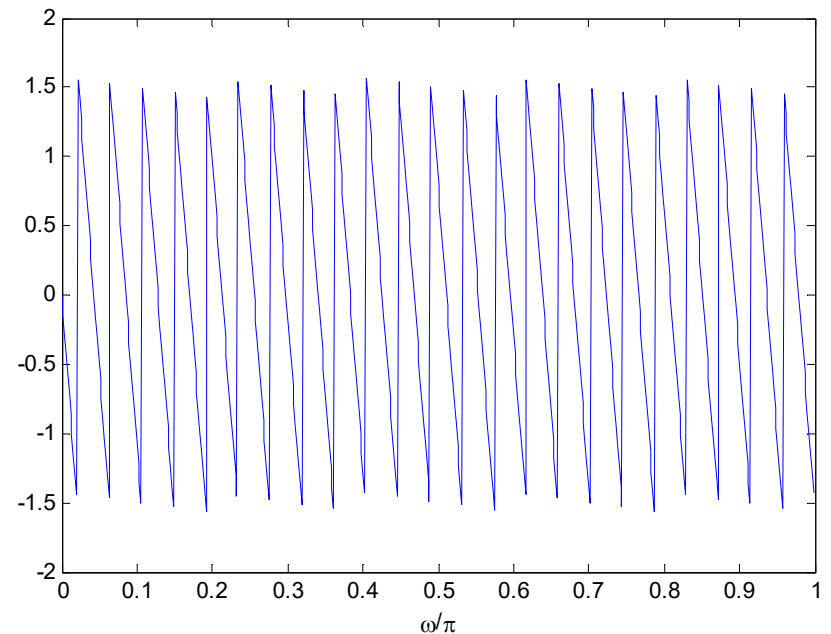


```
figure,plot(w/pi,(abs(H0.*F0+H1.*F1)/2)),xlabel('\omega/\pi'),
title({'Amplitudska k-ka od 'ulaza u banku analize' 'do izlaza iz banke sinteze - konst'});
figure,plot(w/pi,unwrap(angle(H0.*F0+H1.*F1)/2)),xlabel('\omega/\pi'),
title({'Fazna k-ka od 'ulaza u banku analize' 'do izlaza iz banke sinteze - lin faza'});
```

Amplitudska k-ka od
ulaza u banku analize
do izlaza iz banke sinteze - konst



Fazna k-ka od
ulaza u banku analize
do izlaza iz banke sinteze - lin faza

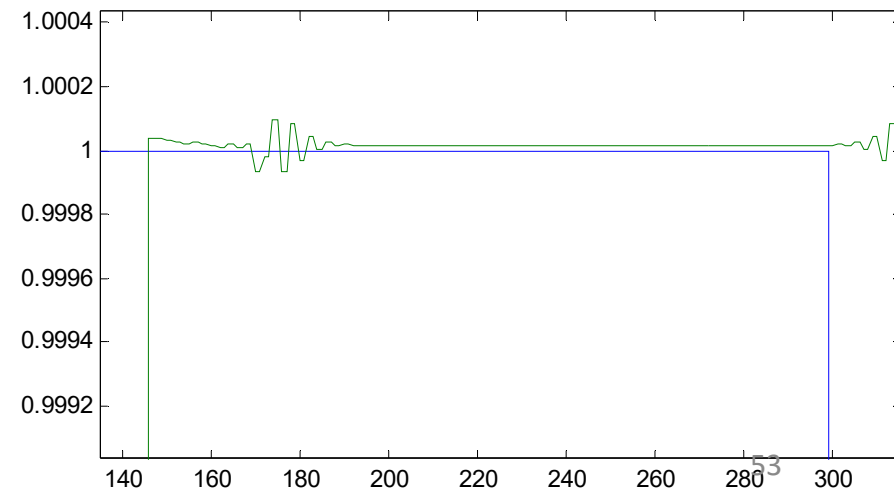
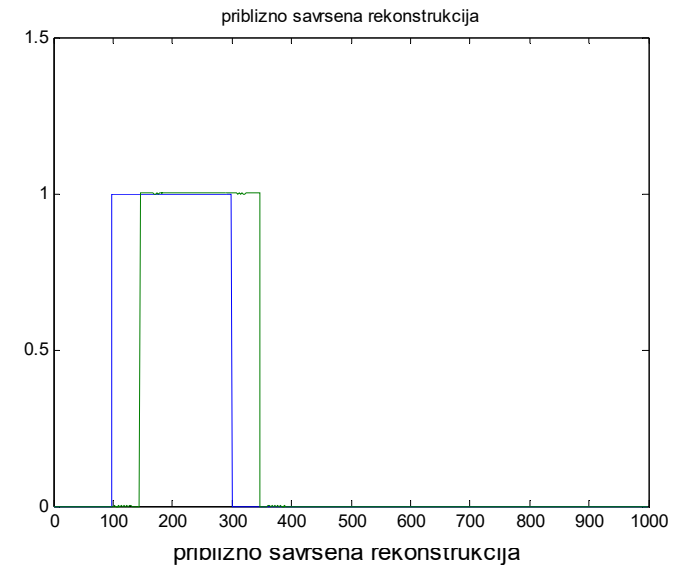


Dvokanalna QMF banka – selektivnija filtri višeg reda



%% provera sa ulaznim signalom oblika usamljenje cetvrtke

```
x=zeros(1000,1);
x(100:300)=1;
u0=filter(h0,1,x);
u1=filter(h1,1,x);
v0=u0(1:2:end);
v1=u1(1:2:end);
figure,subplot(3,1,1),plot(0:length(x)-1,x);
subplot(3,1,2),plot(0:length(v0)-1,v0);
subplot(3,1,3),plot(0:length(v1)-1,v1);
w0=zeros(size(x));
w0(1:2:end)=v0;
w1=zeros(size(x));
w1(1:2:end)=v1;
v0k=filter(f0,1,w0);
v1k=filter(f1,1,w1);
y=v0k+v1k;
figure,plot(0:length(x)-1,x,0:length(x)-1,y),ylim([0 1.5]),
title('priblizno savrsena rekonstrukcija');
```



Dvokanalna IIR QMF filterarska banka

- Mogu se projektovati i IIR dvokanalne filterarske banke
- Da bi se to postiglo, treba napraviti IIR (**dvostruko**) komplementaran filterarski par
- Filtri koji se realizuju kao paralelna veza svepropusnika zadovoljavaju ovaj uslov

All-pass i power

Dvokanalna IIR filtarska banka (*Half-band* IIR filtri)

- Realizacija preko paralelne veze svepropuniska (da bi se dobila efikasna struktura jer se istovremeno implementira ceo filtarski par)
- Sekcije nižeg reda (drugog i prvog, kao i kod svih IIR filtara, smanjuje se uticaj konačne dužine kodne reči na raspored nula i polova)

Realizacija IIR filtarskog para preko paralelne veze *all-pass* filtara

$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{[A_0(e^{j\omega}) + A_1(e^{j\omega})]}{2}$$

$$A_0(e^{j\omega}) = e^{j\varphi_0(\omega)} \quad A_1(e^{j\omega}) = e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (e^{j\varphi_0(\omega)} \pm e^{j\varphi_1(\omega)})$$

$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega)}{2}} e^{j\frac{\varphi_1(\omega)}{2}} \left(e^{j\left(\frac{\varphi_0(\omega)}{2} - \frac{\varphi_1(\omega)}{2}\right)} \pm e^{j\left(-\frac{\varphi_0(\omega)}{2} + \frac{\varphi_1(\omega)}{2}\right)} \right)$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}}}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

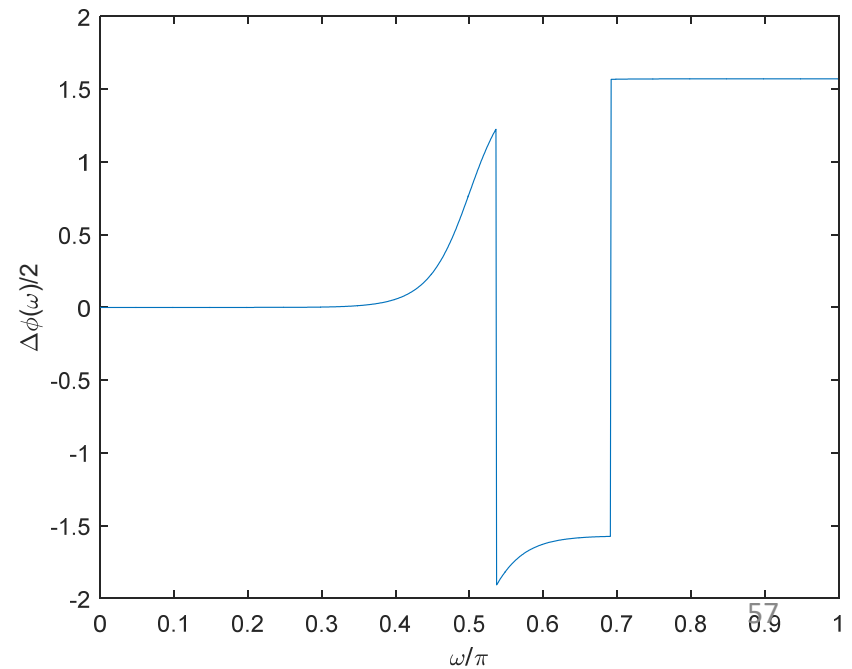
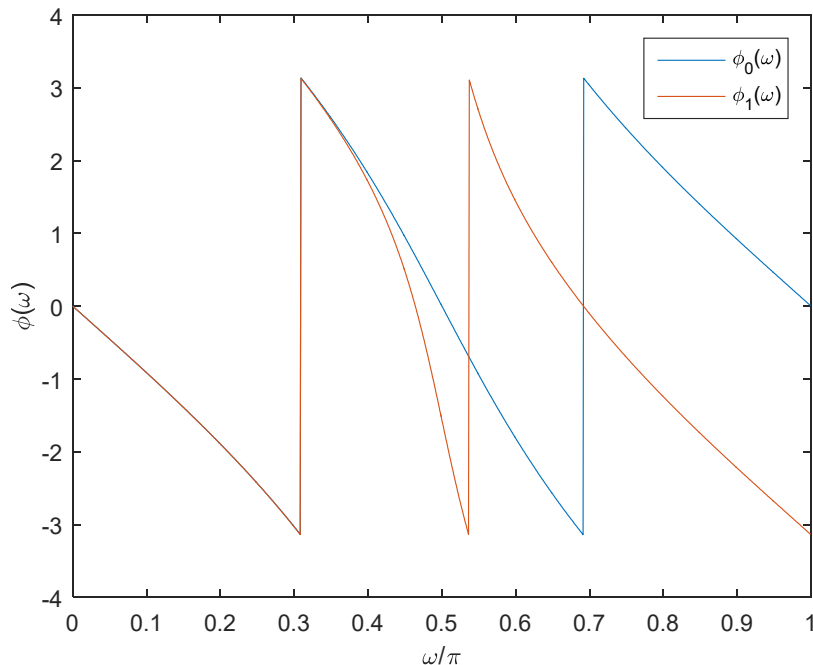
**Već viđeno
NIJE ograničeno na
HB filtre**

Realizacija IIR filtarskog para preko paralelne veze *all-pass* filtara

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}}}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}\right) e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

**Već viđeno
NIJE ograničeno na
HB filtre**

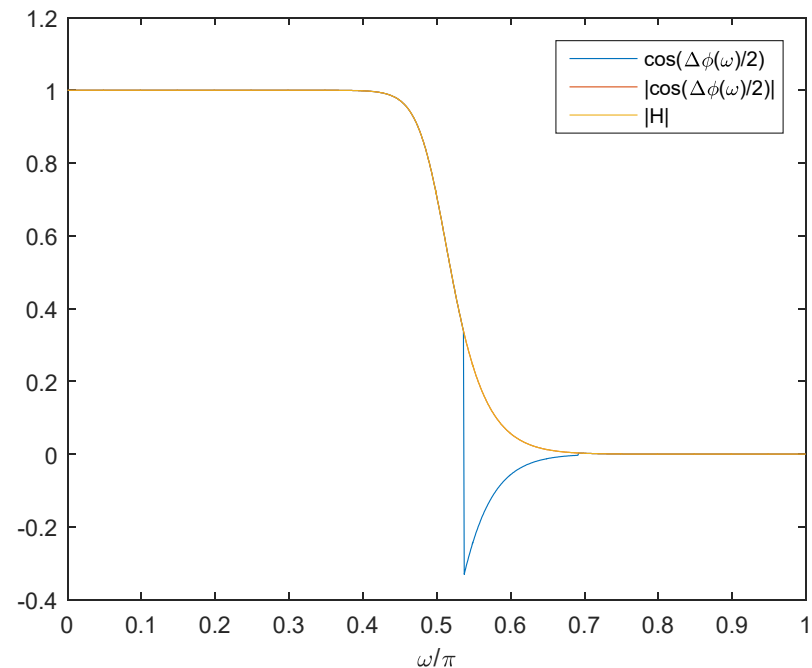


Realizacija IIR filtarskog para preko paralelne veze *all-pass* filtara

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}}}{2} e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)}{2}\right) e^{j\frac{\varphi_0(\omega) + \varphi_1(\omega)}{2}}$$

**Već viđeno
NIJE ograničeno na
HB filtre**



Komplementarnost

$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = \frac{[A_0(e^{j\omega}) \pm A_1(e^{j\omega})]}{2}$$

$$G_{LP}(e^{j\omega}) + G_{HP}(e^{j\omega}) = A_0(e^{j\omega})$$

$$|G_{LP}(e^{j\omega})| = \left| \cos\left(\frac{\Delta\varphi(\omega)}{2}\right) \right|$$

$$|G_{HP}(e^{j\omega})| = \left| \sin\left(\frac{\Delta\varphi(\omega)}{2}\right) \right|$$

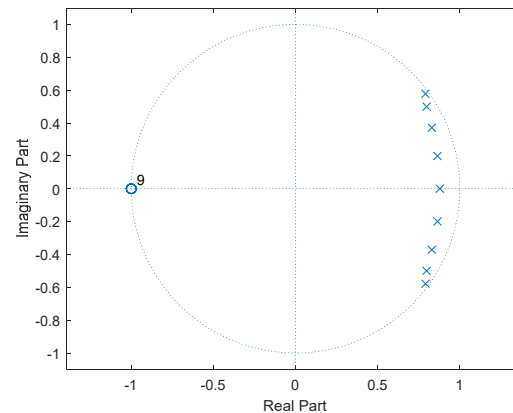
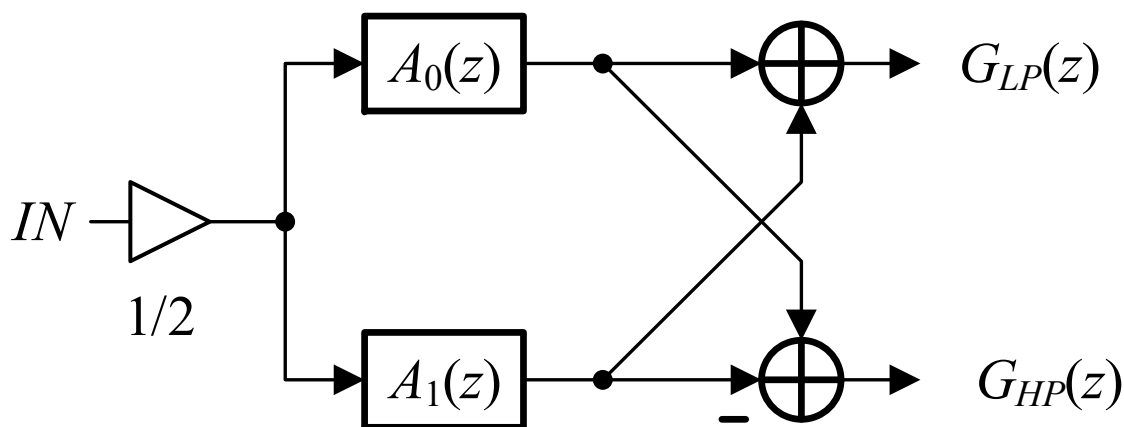
$$|G_{LP}(e^{j\omega})|^2 + |G_{HP}(e^{j\omega})|^2 = 1$$

*Već viđeno
NIJE ograničeno na
HB filtre*

All-pass

Power

Realizacija preko sekcija nižeg reda



$$\beta_l = (r_l)^2, \beta_l < \beta_{l+1}$$

$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2$$

$$G_{HP}(z) = [A_0(z) - A_1(z)]/2$$

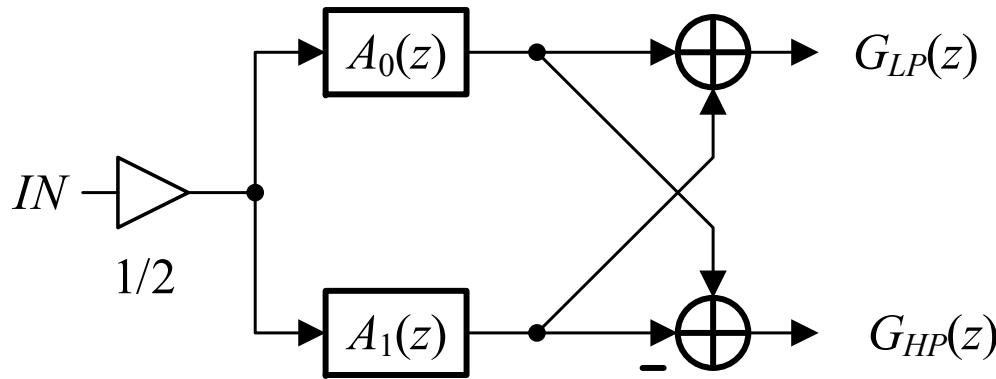
OPŠTI SLUČAJ – filtri **NE** moraju biti *half-band*

r_l – moduli polova

$$A_0(z) = \prod_{l=2,4,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + \beta_l z^{-2}}$$

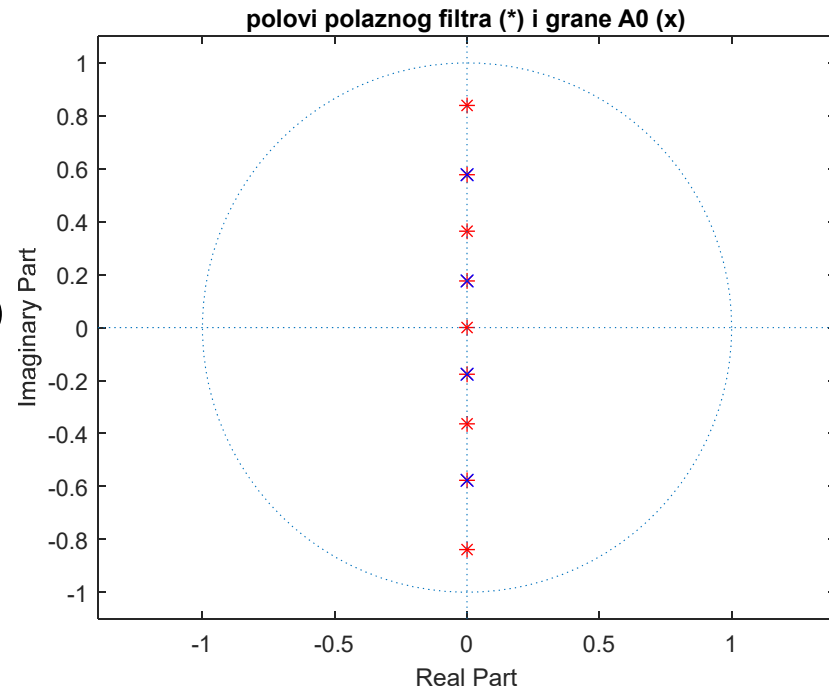
$$A_1(z) = \frac{\alpha_1 + z^{-1}}{1 + \alpha_1 z^{-1}} \prod_{l=3,5,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha_l(1 + \beta_l)z^{-1} + \beta_l z^{-2}}$$

Realizacija IIR filtarskog para preko paralelne veze *all-pass* filtera



$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2$$

$$G_{HP}(z) = [A_0(z) - A_1(z)]/2$$



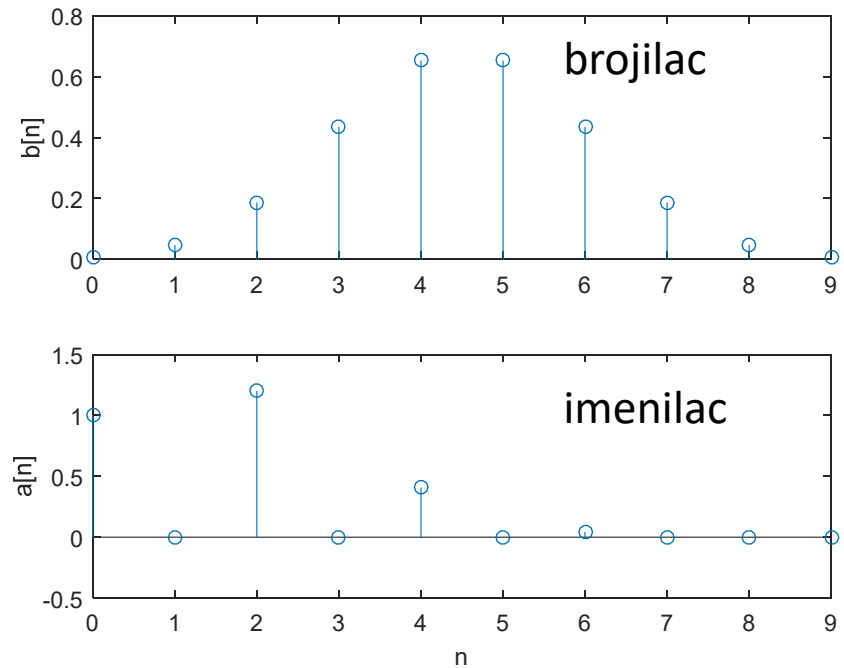
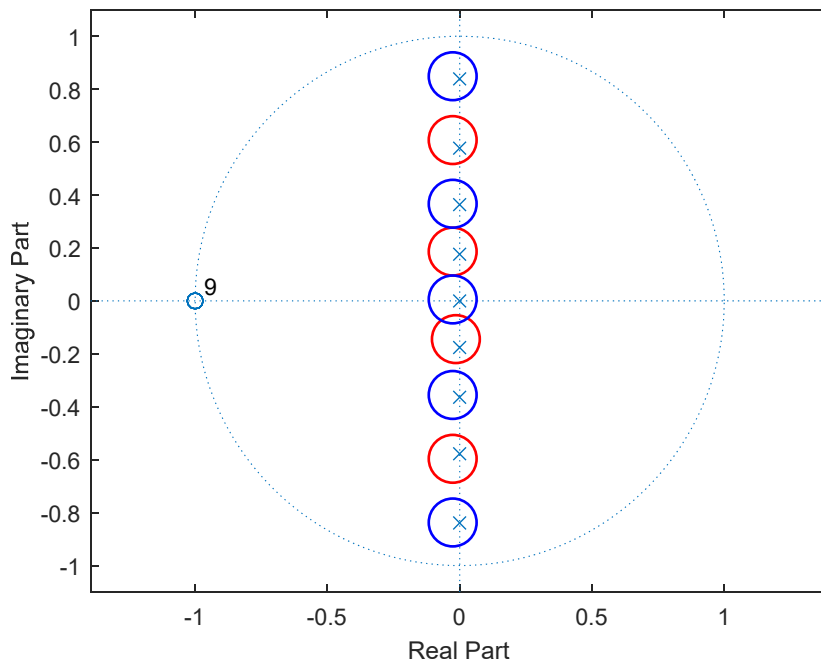
$$\beta_l = (r_l)^2, \quad \beta_l < \beta_{l+1}$$

Ako su filtri *half-band* moguće su dodatne pogodne uštede u broju računskih operacija

r_l – moduli
polova

Half-band IIR filtri - primer

Batervortov *half-band* filter reda $N=9$



Half-band IIR filtri - primer

Batervortov *half-band* filter reda $N=9$

$$A_0(z) = \frac{0.0104 + 0.3644z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.3644z^{-2} + 0.0104z^{-4}}$$
$$A_{02}(z^2) = \frac{0.0104 + 0.3644z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.3644z^{-2} + 0.0104z^{-4}}$$
$$A_{02}(z) = \frac{0.0104 + 0.3644z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.3644z^{-1} + 0.0104z^{-2}}$$

Half-band IIR filtri - primer

Batervortov *half-band* filter reda $N=9$

$$A_1(z) = z^{-1} \frac{0.0933 + 0.8366z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.8366z^{-2} + 0.0933z^{-4}}$$

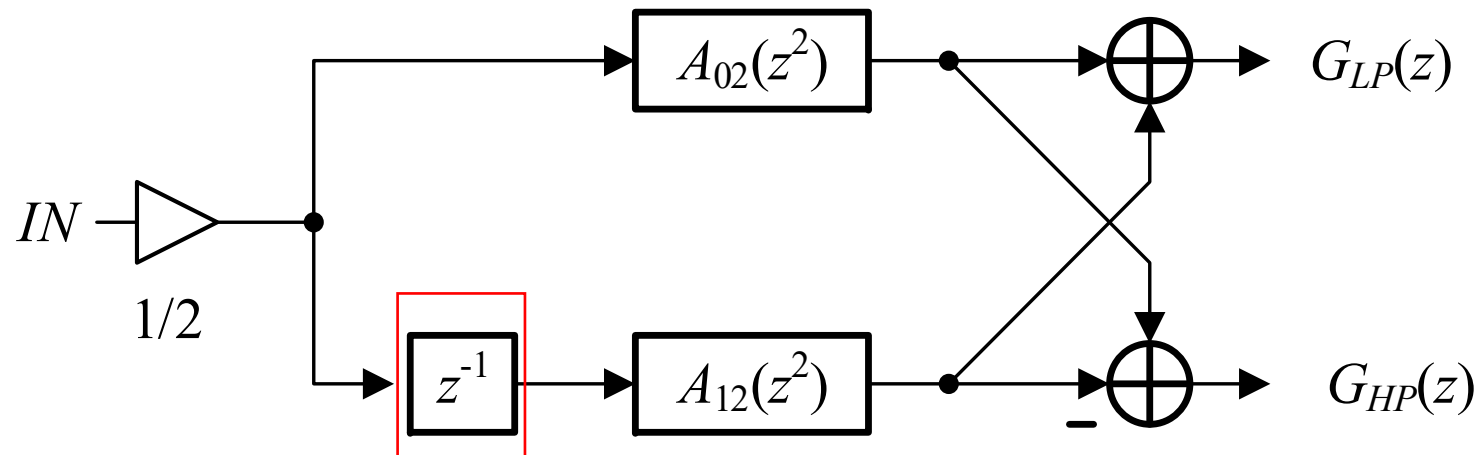
$$A_{12}(z^2) = \frac{0.0933 + 0.8366z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.8366z^{-2} + 0.0933z^{-4}}$$

$$A_{12}(z) = \frac{0.0933 + 0.8366z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.8366z^{-1} + 0.0933z^{-2}}$$

Jedinično kašnjenje – trivijalna
sekcija prvog reda

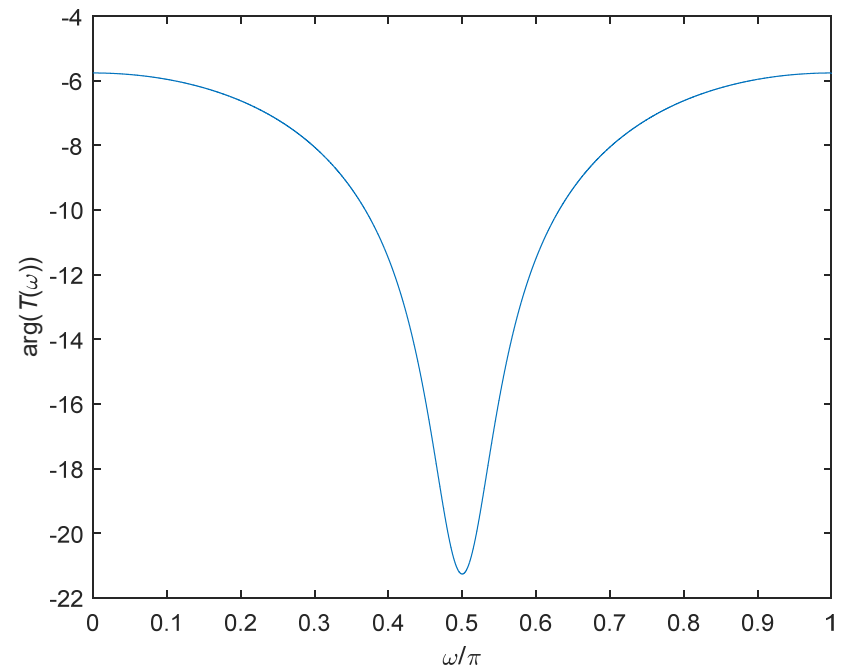
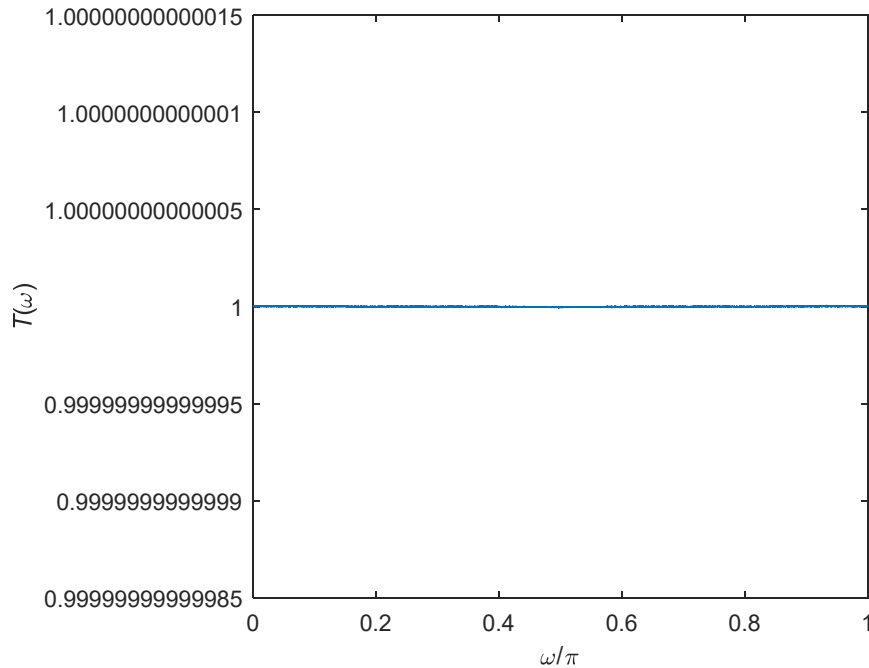
Half-band IIR filtri

Realizacija preko paralelne veze svepropusniska

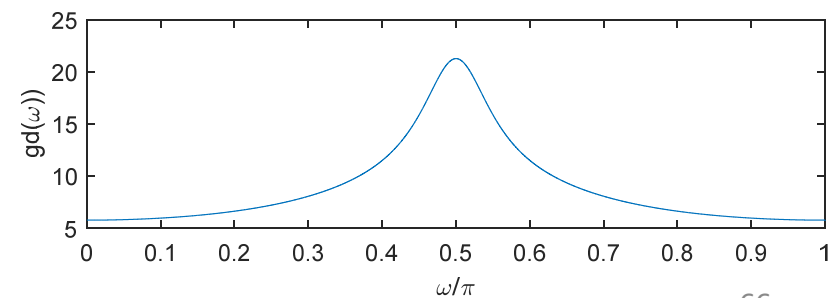


Jedinično kašnjenje – trivijalna sekcija prvog reda

Dvokanalne banke filtara – IIR



NIJE banka sa perfektnom
rekonstrukcijom (ni blizu, jer nema
linearnu fazu)



Ortogonalna banka bez preklapanja spektra

$$H_1(z) = -z^{-N_0} H_0(-z^{-1})$$

Uslov ortogonalnosti

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})|$$

Uslov da nema aliasinga

$$F_0(z) = 2H_1(-z), \quad F_1(z) = -2H_0(-z)$$

$$T(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$$

Ortogonalna banka bez preklapanja spektra

$$H_1(z) = -z^{-N_0} H_0(-z^{-1})$$

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})|$$



Uslov ortogonalnosti

Ovaj uslov može da se zadovoljni filtarskim parom od kojih je LP filter minimalne faze a HP filter maksimalne faze

FIR filtri minimalne faze

- Nule se nalaze unutar jediničnog kruga (ili na krugu)
- Nemaju linearnu faznu karakteristiku
- Koriste se za ortogonalne filtarske banke
- Koristi se u obradi audio signala gde je često važnije da je grupno kašnjenje malo nego da je konstantno

FIR filtri minimalne faze

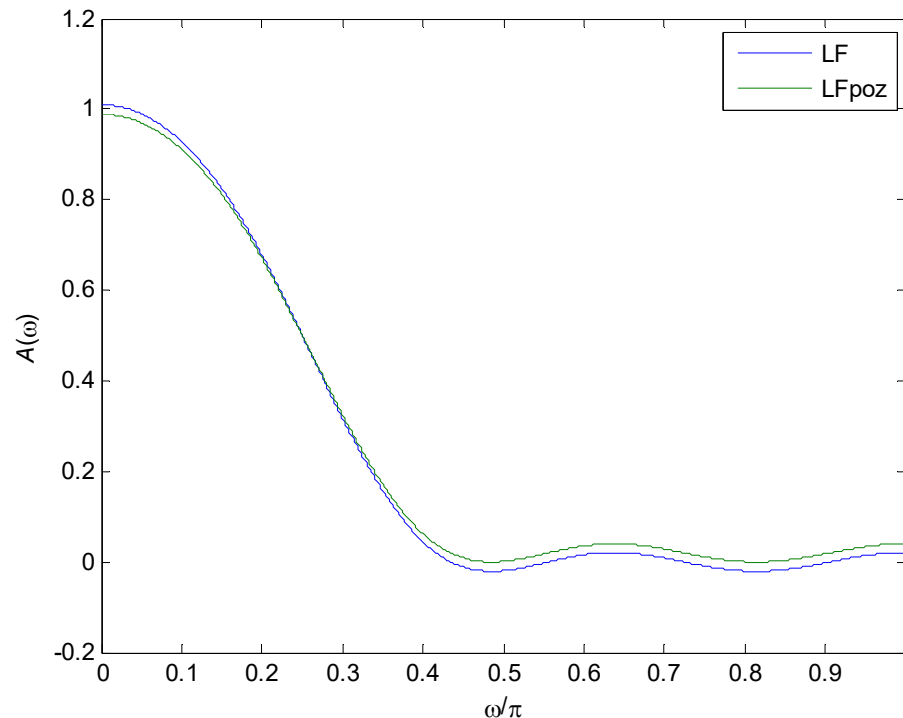
- Filtar ovog tipa reda L se projektuje tako što se polazi od $F_{\text{LIN}}(z)$ FIR filtra linearne faze reda $2L$.
- Realna amplitudska funkcija filtra linearne faze se „pomera na gore“ i skalira tako da bude strogo nenegativna.

$$h_{\text{LFpoz}} = h_{\text{LF}} * (1 - ds^2);$$

$$h_{\text{LFpoz}}(2 * N / 2 + 1) = h_{\text{LFpoz}}(2 * N / 2 + 1) + ds^2 / 2;$$

FIR filtri minimalne faze

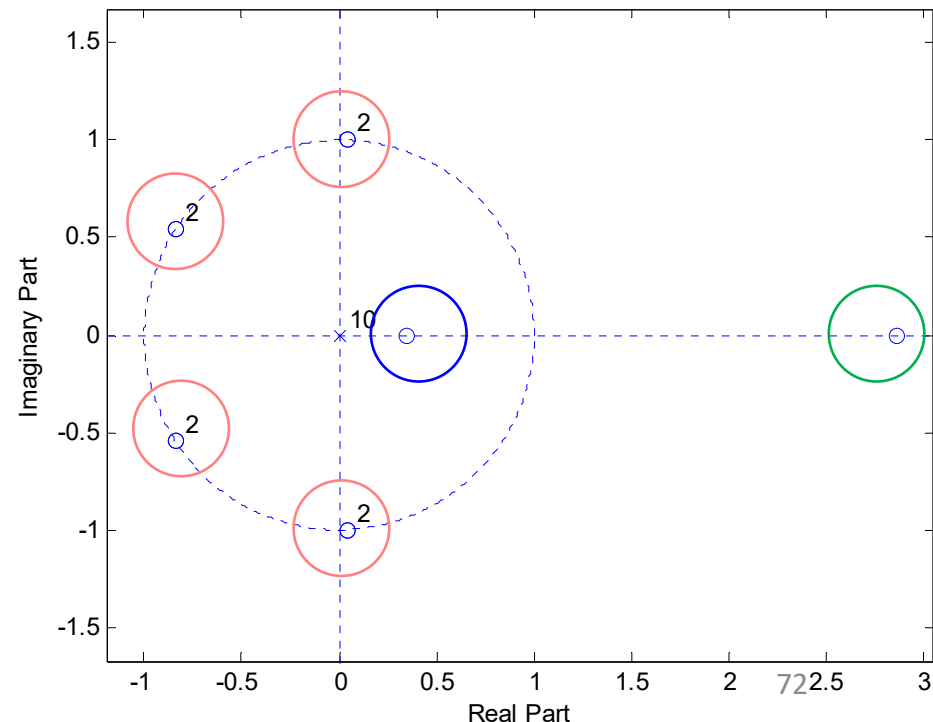
Realna amplitudska funkcija filtra linearne faze se „pomera na gore“ i skalira tako da bude strogo nenegativna.



FIR filtri minimalne faze

Filtar dobijen na ovaj način je i dalje linearne faze (nije poremećena simetrija koeficijenata impulsnog odziva)

ima **dvostruke nule na jediničnom krugu**, **nule unutar jediničnog kruga** i njima **recipročne nule van jediničnog kruga**.

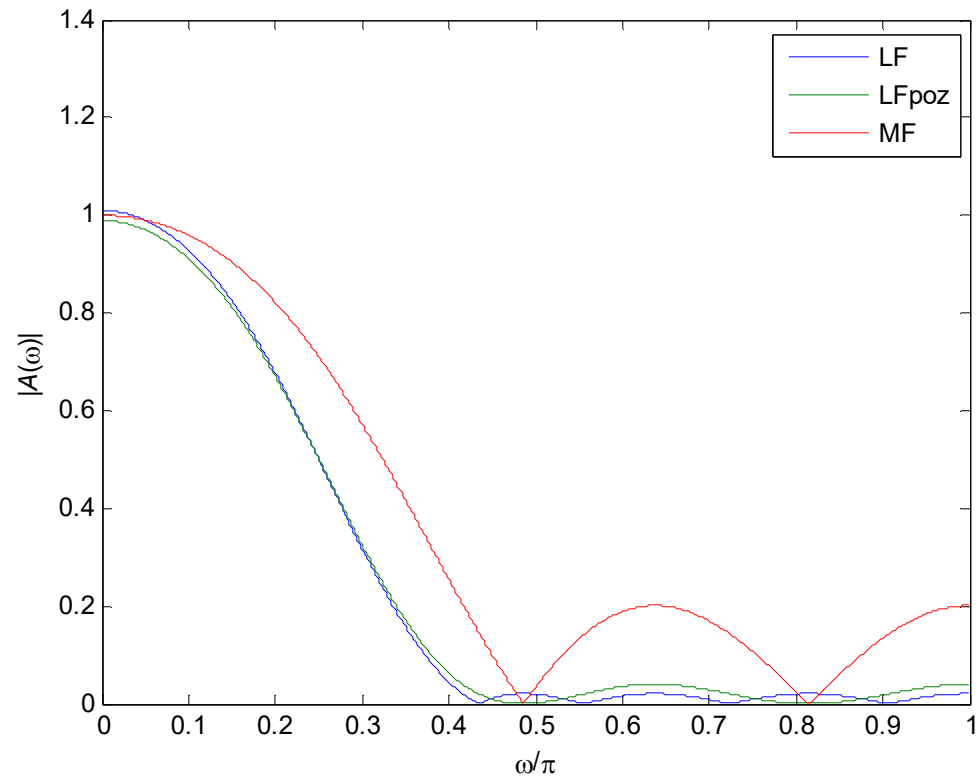


FIR filtri minimalne faze

- Filtar minimalne faze (LP) se formira tako što se grupišu nule unutar jediničnog kruga i po jedna od svake dvostruke nule sa jediničnog kruga.
- Od ostalih nula se formira HP filter maksimalne faze (koji nam, za sada, nije važan).

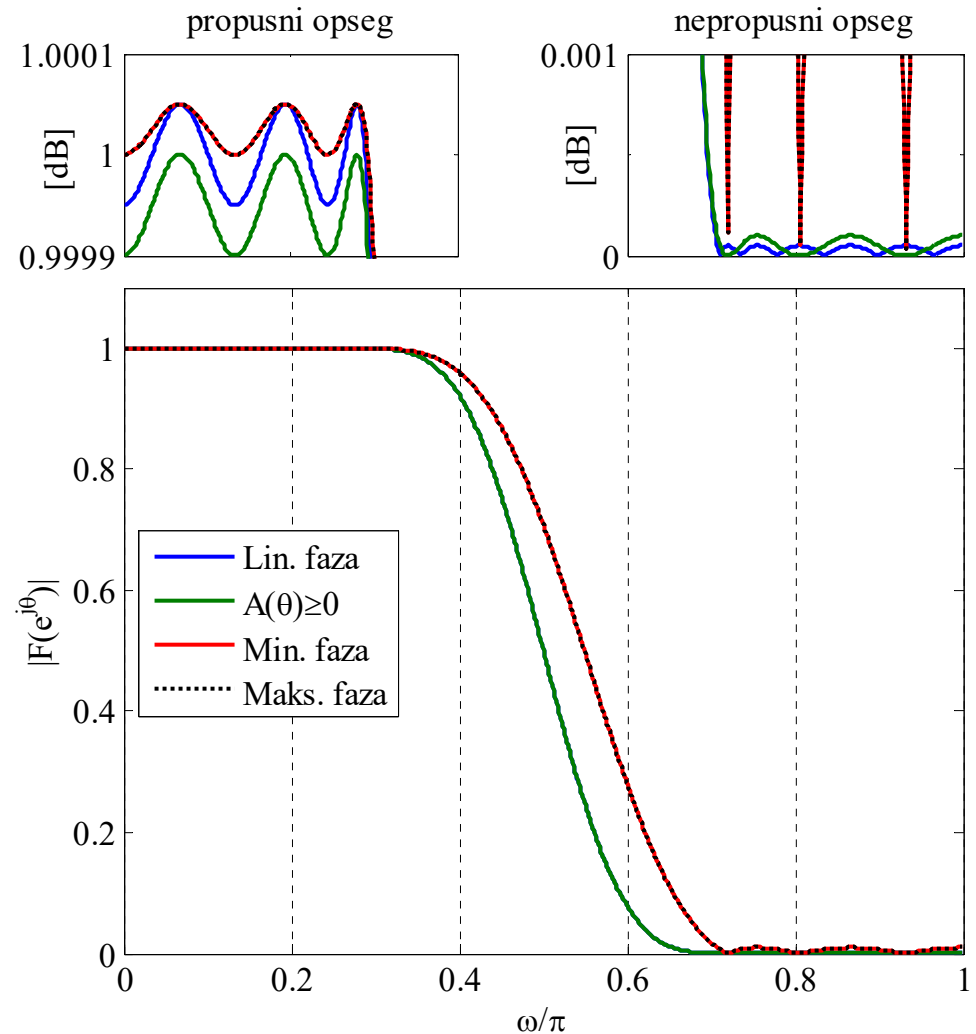
```
nule=roots(h_LFpoz)
hmf=poly(nule([2 3 6 7 10]));
hmf=hmf/sum(hmf);
```

FIR filtri minimalne faze



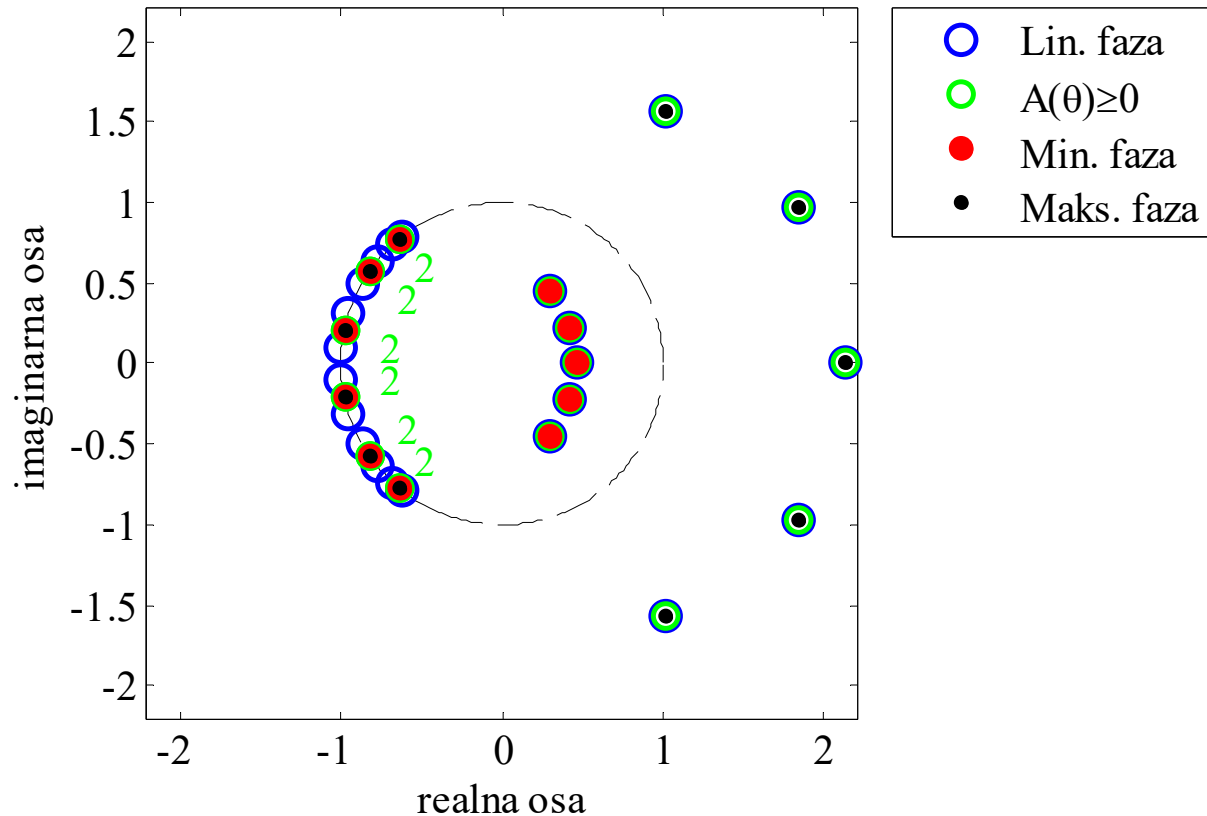
FIR filtri minimalne faze

Realna amplitudska funkcija filtra linearne faze se „pomeri na gore“ i skalira tako da bude strogo nenegativna.



FIR filtri minimalne faze

Filtar minimalne faze se formira tako što se grupišu nule unutar jediničnog kruga i po jedna od svake dvostruke nule sa jediničnog kruga.



FIR filtri minimalne faze

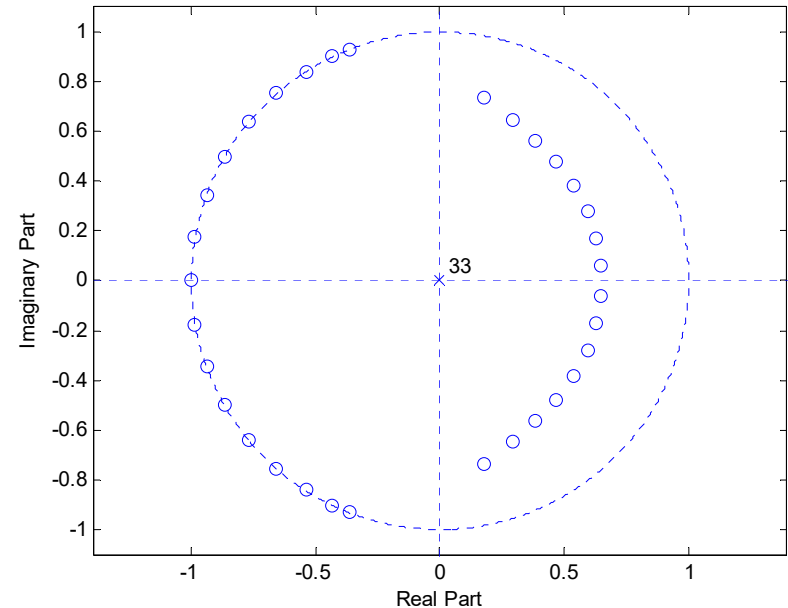
- FIR filtri halfband minimalne faze mogu se u MATLABu projektovati funkcijom firhalfband koja projektuje filter minimalne faze prema opisanom algoritmu
- S obzirom na to da se projektovanje zasniva na projektovanju filtra linearne faze dva puta većeg reda (i dva puta većeg slabljenja), metoda za postaje numerički osetljiva za nešto veća zahtevana slabljenja u nepropusnom opsegu

FIR filtri minimalne faze

```

%% primer 3 - FIR filter minimalne faze
close all; clear;
N=33;
h0=firhalfband(N,0.001,'dev','minphase');
figure,stem(0:N,h0);
figure,zplane(h0,1);
h1=fliplr(h0); % filter max faze
figure,stem(0:N,[h0' h1']);
figure,zplane(h1,1);
[H0,w]=freqz(h0,1);
[H1,w]=freqz(h1,1);
figure,plot(w/pi,20*log10(abs([H0 H1])));
figure,plot(w/pi,unwrap(angle([H0 H1])));
h=conv(h0,h1); % filter lin faze, kaskadna veza filtra min faze i filtra max faze
figure,stem(0:2*N,h);
figure,zplane(h,1);
[H,w]=freqz(h,1);
figure,plot(w/pi,20*log10(abs([H0 H1 H])),xlabel('\omega/\pi');
figure,plot(w/pi,(abs([H0 H1 H])),xlabel('\omega/\pi');
figure,plot(w/pi,unwrap(angle([H0 H1 H])),xlabel('\omega/\pi');

```



Ortogonalna banka – ML primeri

```
close all; clear;
```

```
N=33;
```

```
h0=firhalfband(N,0.001,'dev','minphase');
```

```
h1=h0;
```

```
h1(2:2:end)=-h1(2:2:end);
```

```
h1=-h1;
```

```
h1=fliplr(h1); %H1(z)=-z^(-N)*H0(-z^-1)
```

```
figure,stem(0:N,[h0' h1']');
```

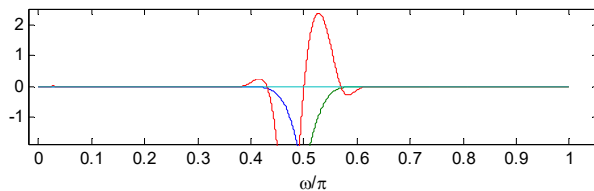
```
[H0,w]=freqz(h0,1,10000);
```

```
[H1,w]=freqz(h1,1,10000);
```

```
figure,plot(w/pi,20*log10(abs([H0 H1 H0+H1])),...)
```

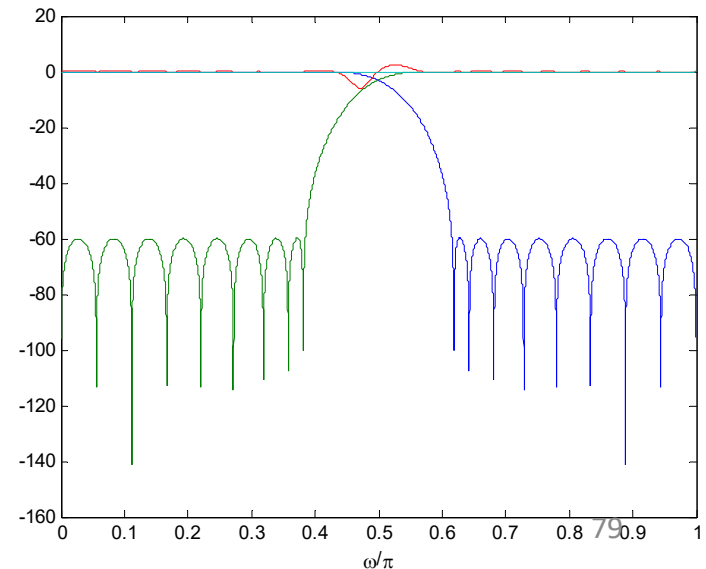
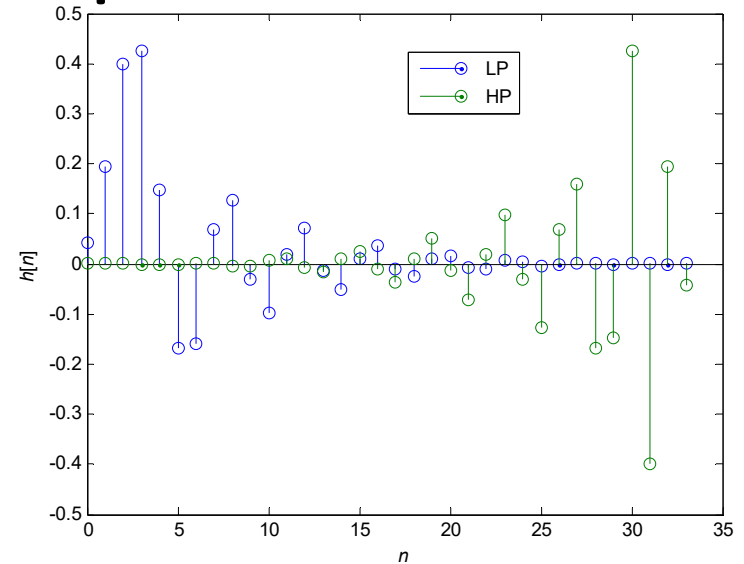
```
w/pi,20*log10(abs(H0).^2+abs(H1).^2),
```

```
xlabel('\omega/\pi');
```



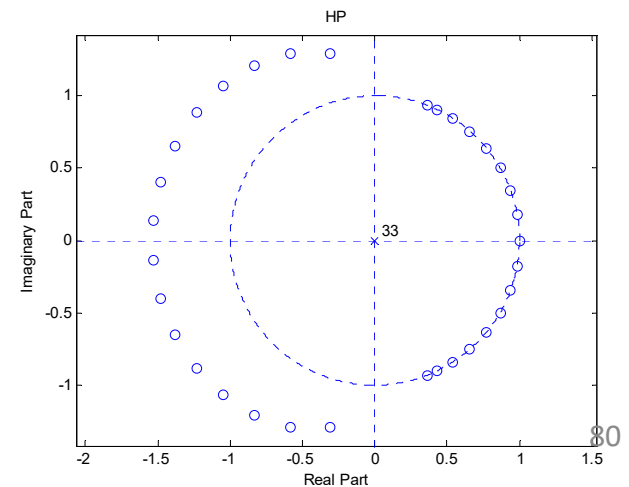
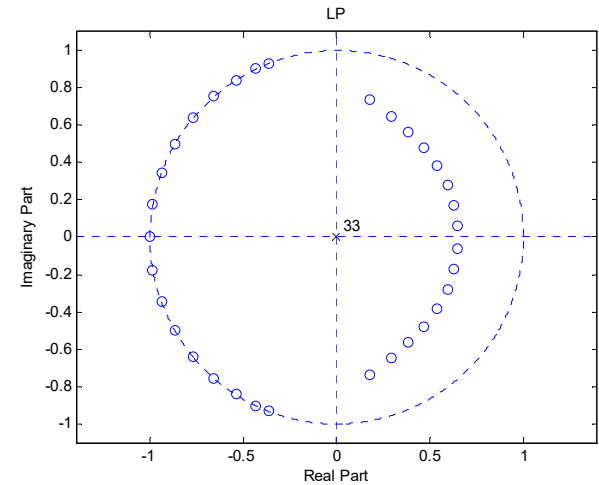
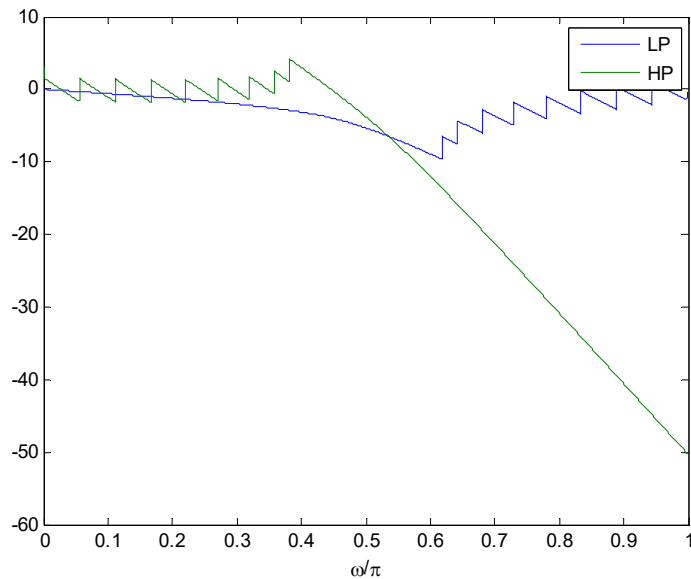
provera komplementarnosti, filtri nisu nisu *all-pass* komplementarni a jesu *power* komplementarni

$$H_1(z) = -z^{-N_0} H_0(-z^{-1})$$



Ortogonalna banka – ML primeri

```
figure,plot(w/pi,unwrap(angle([H0 H1])),xlabel('\omega/\pi'); % filtri NISU line faze
legend('LP','HP');
figure,zplane(h0,1); title('LP');
figure,zplane(h1,1); title('HP');
```



Ortogonalna banka – ML primeri

```
% banka sinteze
```

```
f0=2*h1;
```

```
f0(2:2:end)=-f0(2:2:end);
```

```
f1=-2*h0;
```

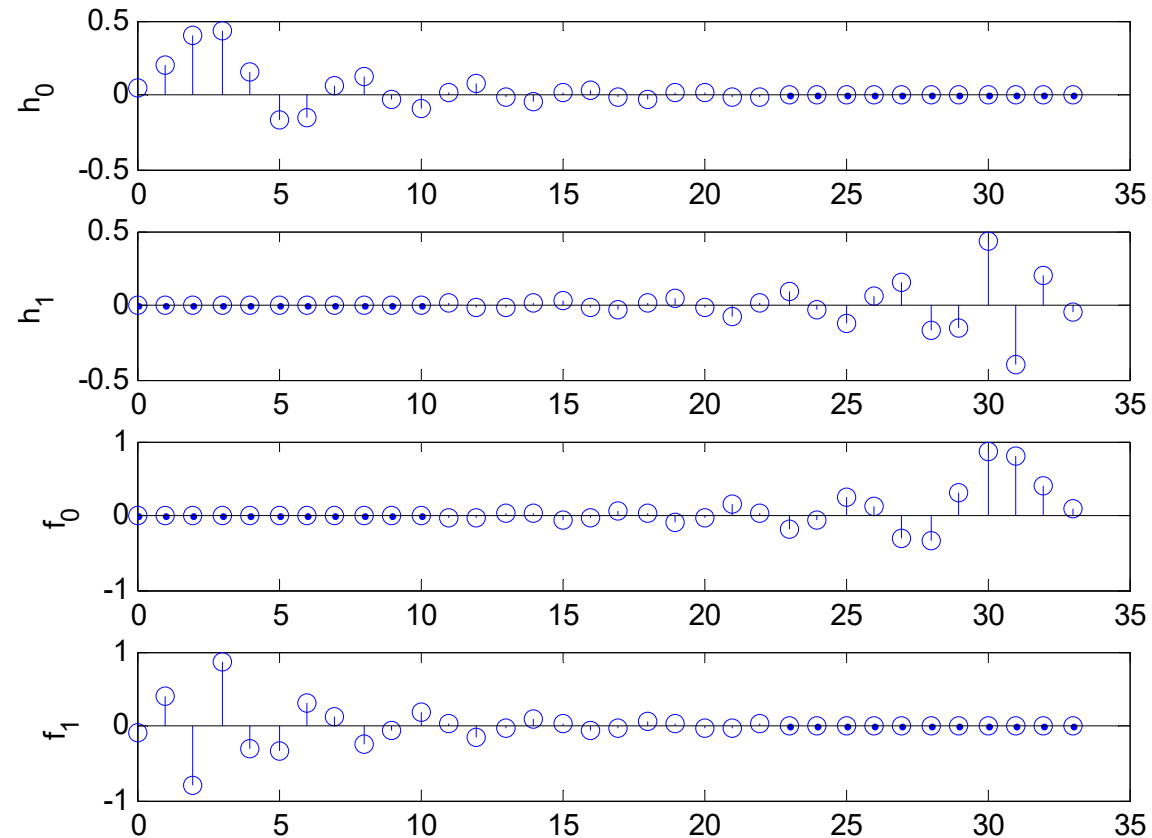
```
f1(2:2:end)=-f1(2:2:end);
```

```
figure,subplot(4,1,1),stem(0:N,h0); ylabel('h_0');
```

```
subplot(4,1,2),stem(0:N,h1); ylabel('h_1');
```

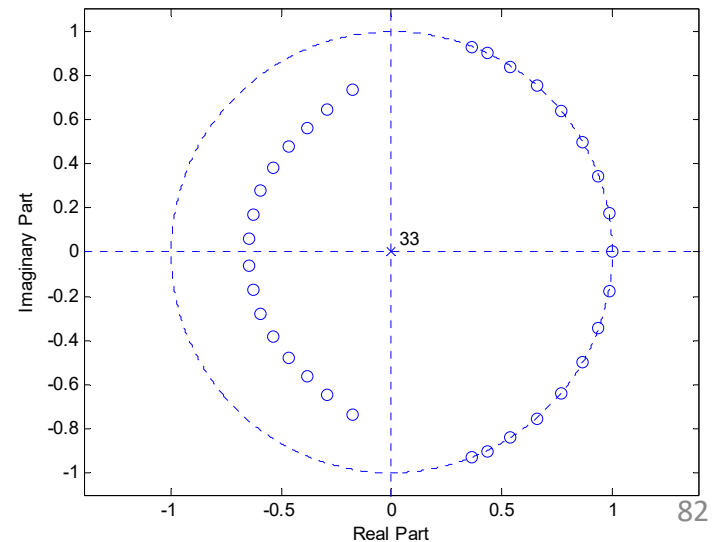
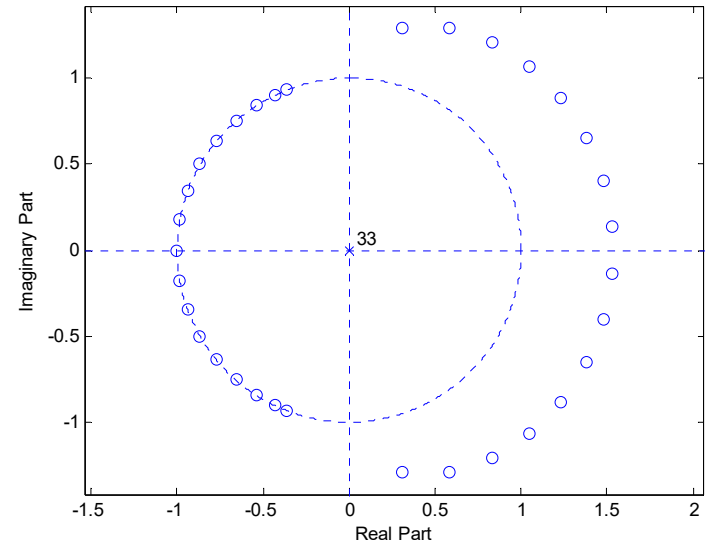
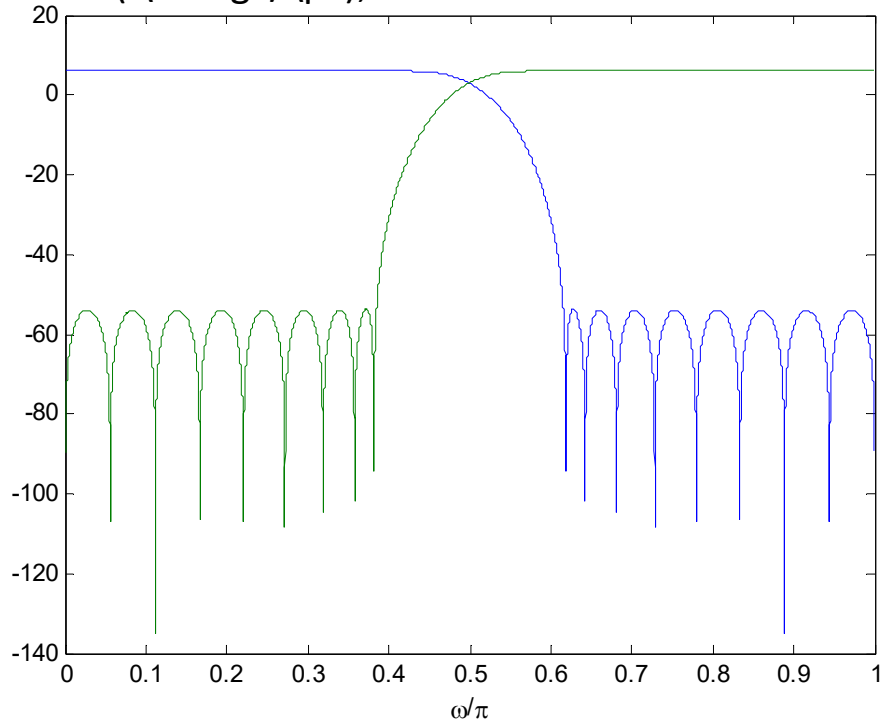
```
subplot(4,1,3),stem(0:N,f0); ylabel('f_0');
```

```
subplot(4,1,4),stem(0:N,f1); ylabel('f_1');
```



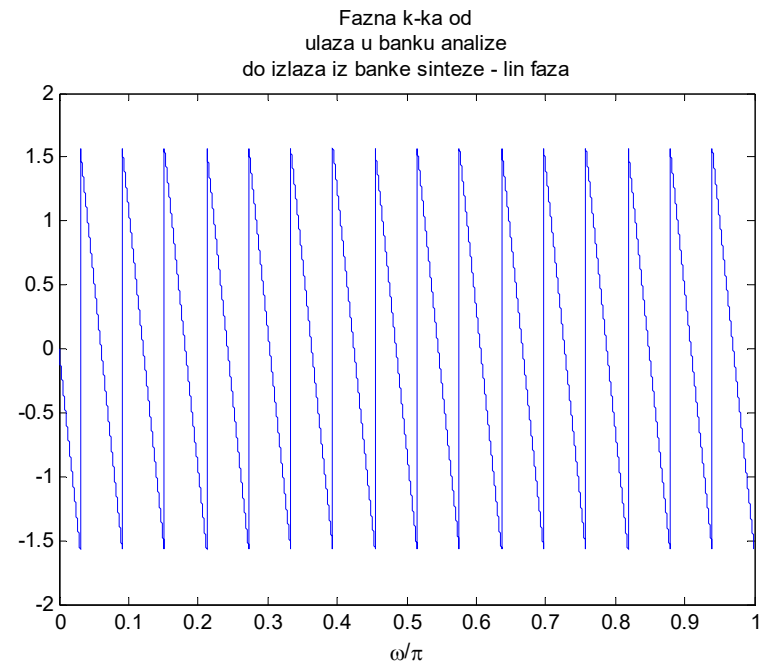
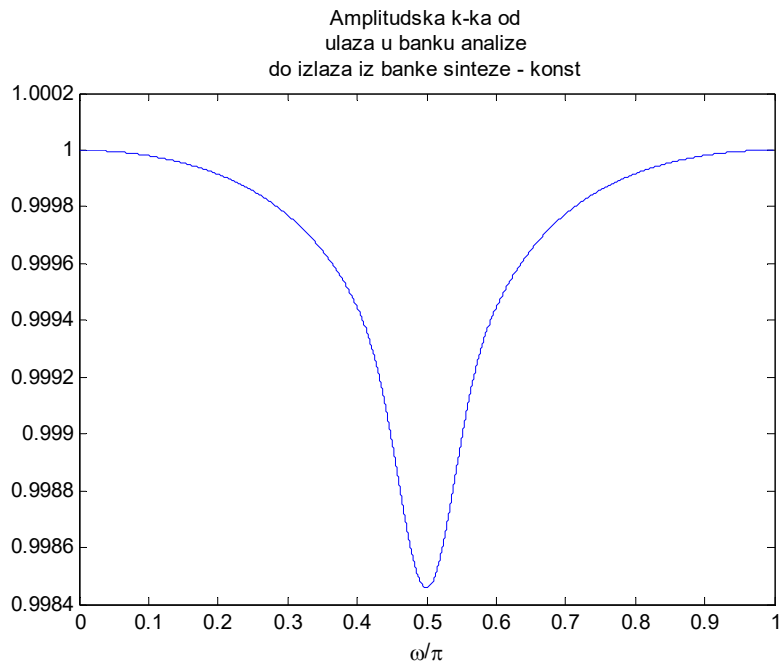
Ortogonalna banka – ML primeri

```
figure,zplane(f0,1);
figure,zplane(f1,1);
[F0,w]=freqz(f0,1,10000);
[F1,w]=freqz(f1,1,10000);
figure,plot(w/pi,20*log10(abs([F0 F1]])),
xlabel('\omega/\pi');
figure,plot(w/pi,unwrap(angle([F0 F1]])),
xlabel('\omega/\pi');
```



Ortogonalna banka – ML primeri

```
figure,plot(w/pi,(abs(H0.*F0+H1.*F1)/2)), xlabel('\omega/\pi'),
figure,plot(w/pi,unwrap(angle(H0.*F0+H1.*F1)/2)), xlabel('\omega/\pi')
```



$$T(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$$

Ortogonalna banka – ML primeri

```

x=zeros(1000,1);
x(100:300)=1;
u0=filter(h0,1,x);
u1=filter(h1,1,x);
v0=u0(1:2:end);
v1=u1(1:2:end);
figure,subplot(3,1,1),plot(0:length(x)-1,x);
subplot(3,1,2),plot(0:length(v0)-1,v0);
subplot(3,1,3),plot(0:length(v1)-1,v1);
w0=zeros(size(x));
w0(1:2:end)=v0;
w1=zeros(size(x));
w1(1:2:end)=v1;
v0k=filter(f0,1,w0);
v1k=filter(f1,1,w1);
y=v0k+v1k;
figure,plot(0:length(x)-1,x,0:length(x)-1,y),
ylim([-1.5 1.5]), title('savrsena rekonstrukcija');

```

